Задача 228 (5 баллов)

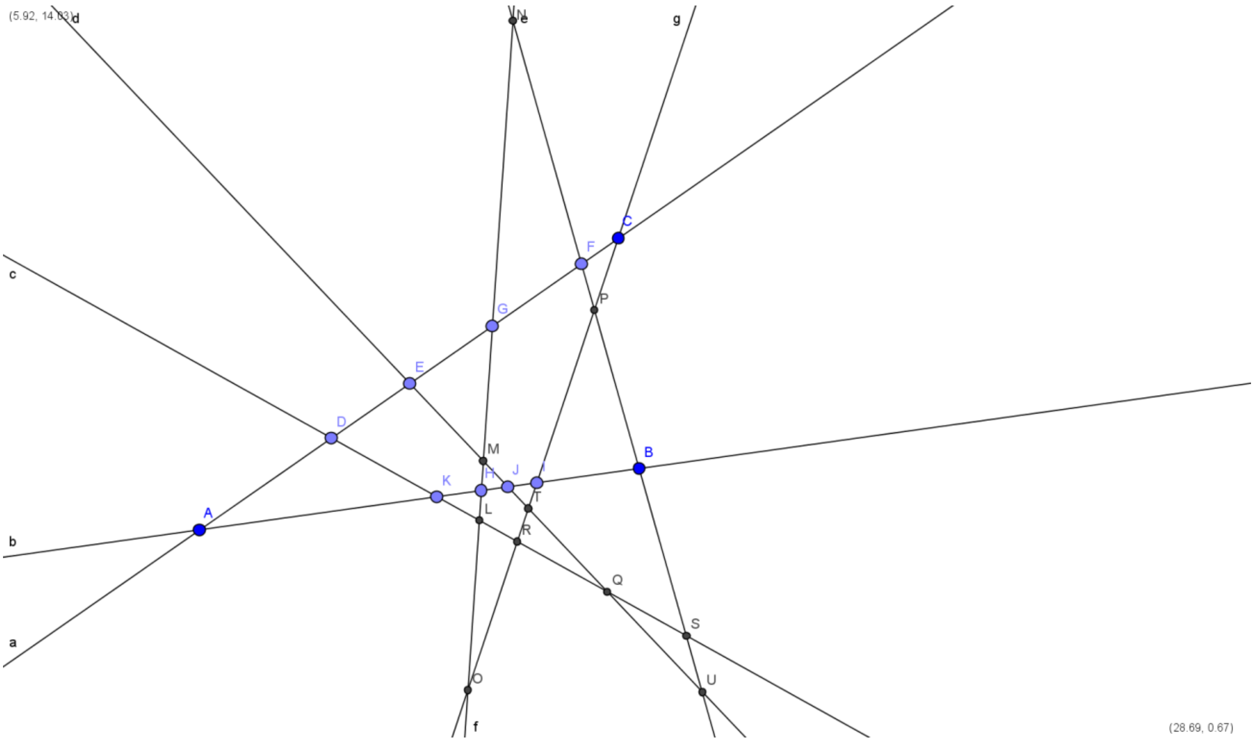
Ответ: минимальное значение количества четырёхугольников при пересечении семи прямых равно 0.

Решение:

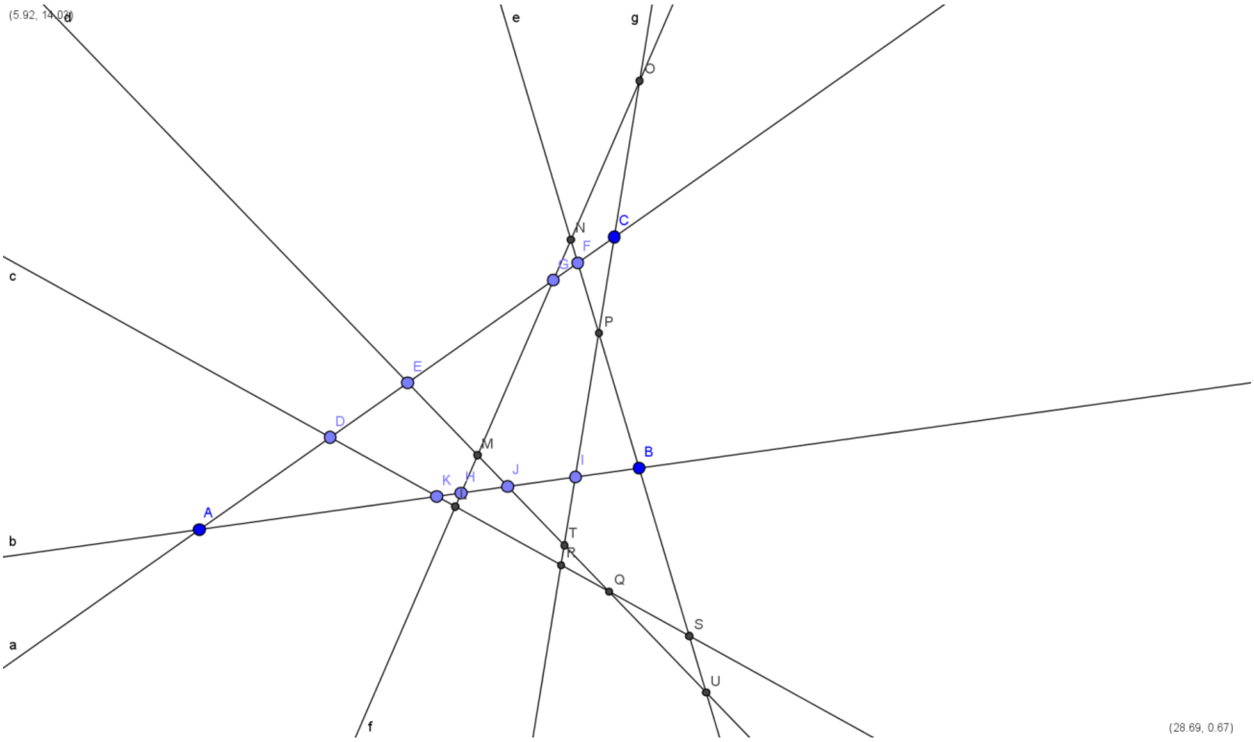
При проведении n прямых на плоскости в общем положении образуется $\frac{n(n+1)}{2}+1$ областей, из них $2n$ неограниченных и $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ ограниченных. Внешний контур ограничивает соответствующий граф, содержащий $\frac{n(n-1)}{2}$ вершин, $n(n-2)$ рёбер (элементарных отрезков) и $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ граней (элементарных многоугольников). При $n=7$ в нашем случае получается 21 вершина, 35 рёбер и 15 граней.

Рассмотрим варианты расположения семи прямых с возможными количествами элементарных четырёхугольников $f_4 = r$ при $r = 0,1,\ldots,10$.

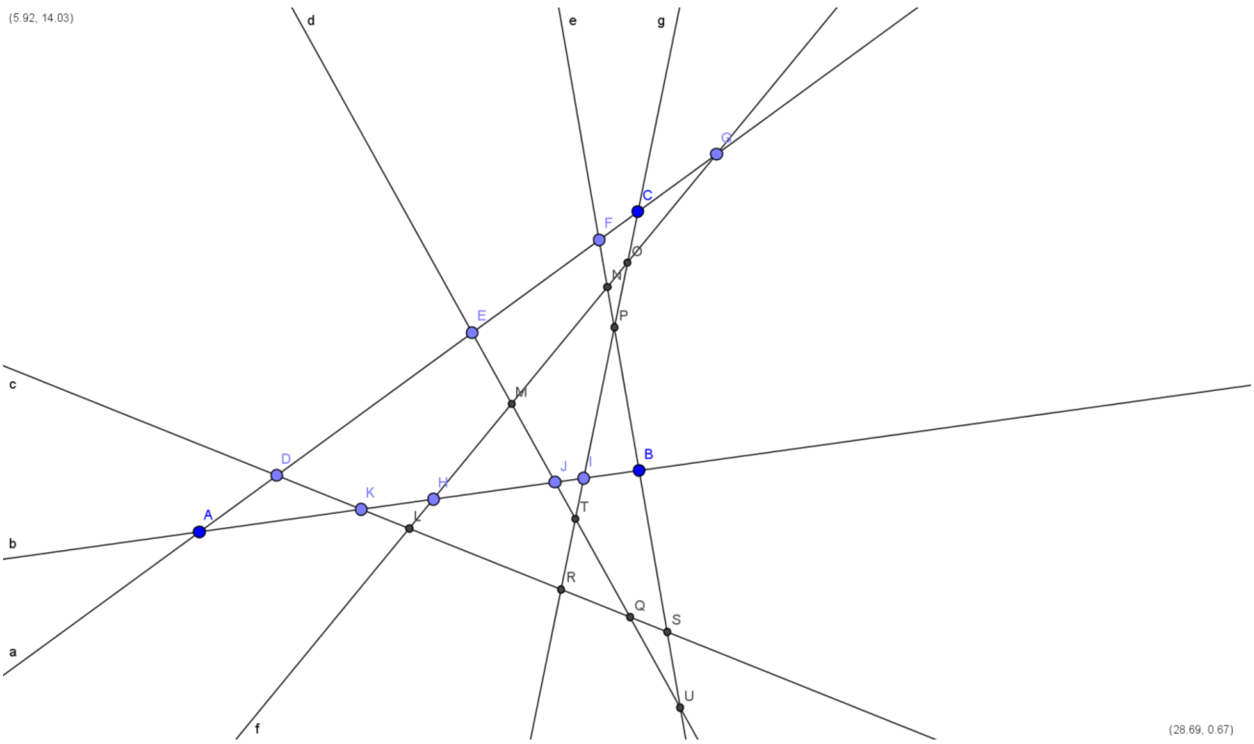
$$f_4 = 0$$



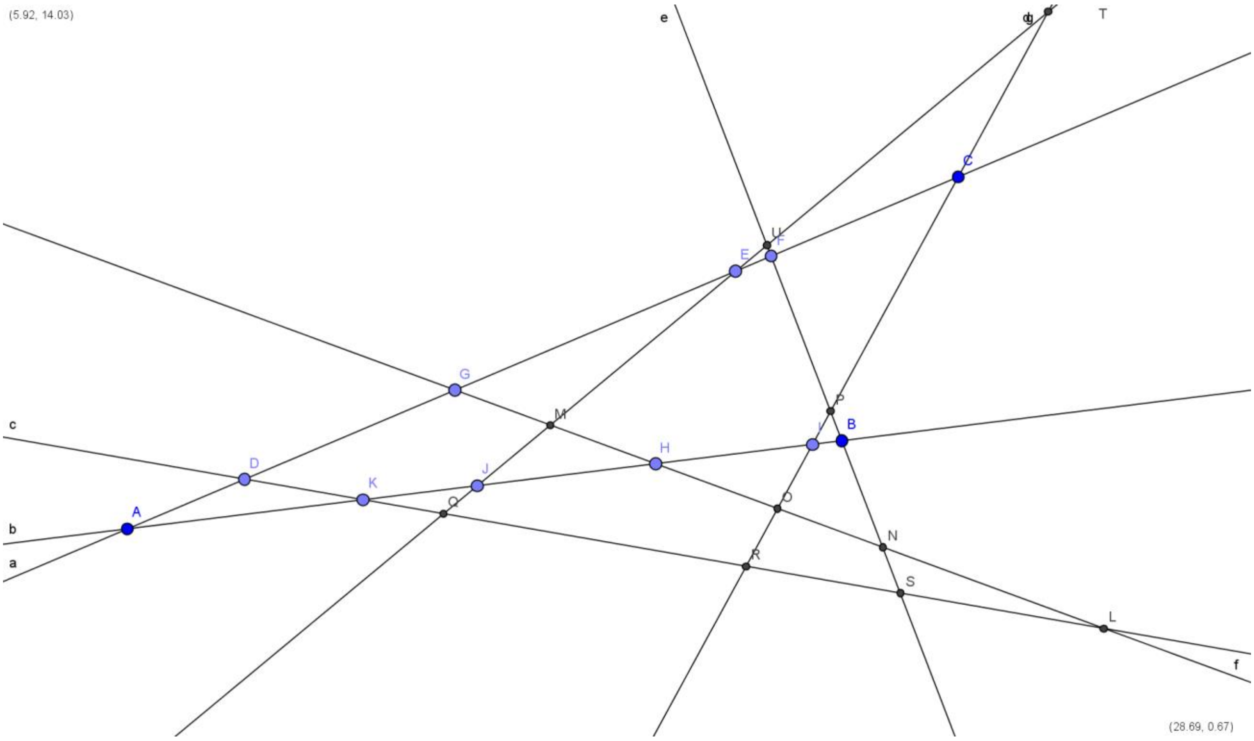
$$f_4 = 1$$


(5.92, 14.03)
d
e
g
O
N
C
G
F
c
P
E
D
M
B
K
H
J
I
A
b
L
T
R
Q
S
a
U
f
(28.69, 0.67)

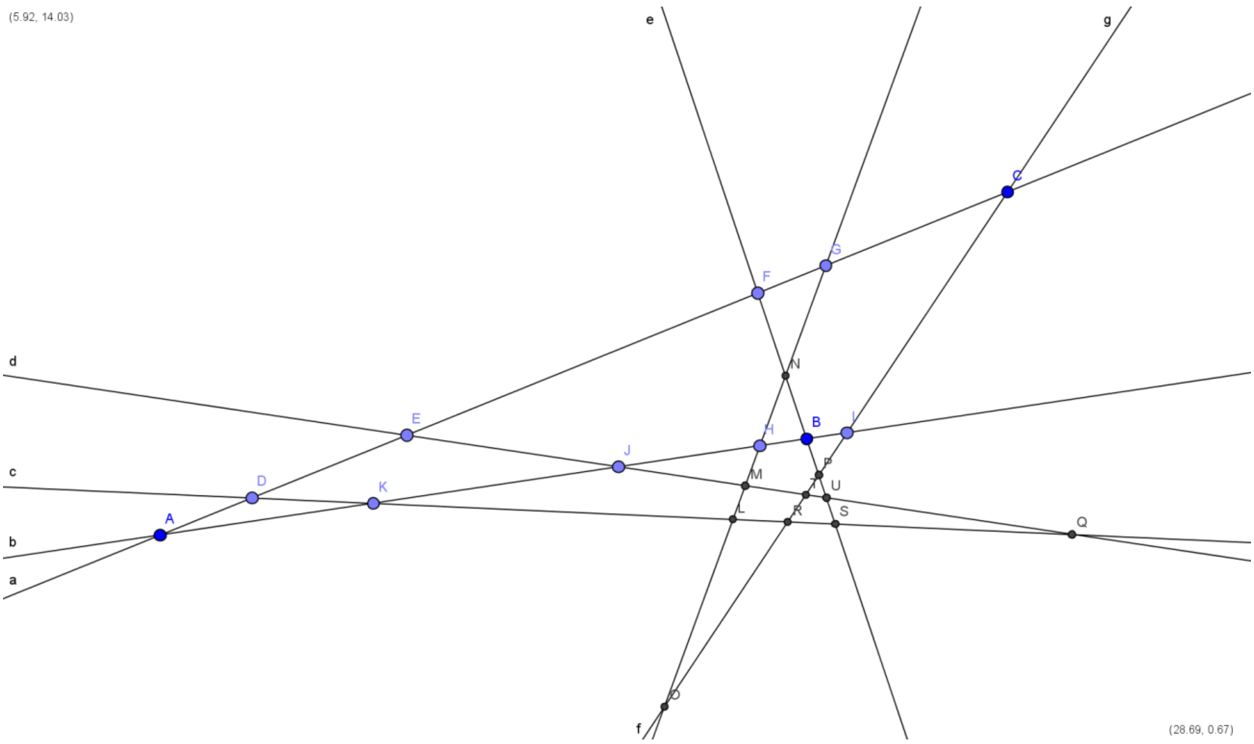
$$f_4 = 2$$


(5.92, 14.03)
d
e
g
G
C
F
O
N
E
P
M
c
D
J
I
B
K
H
A
b
L
T
R
Q
S
a
U
f
(28.69, 0.67)

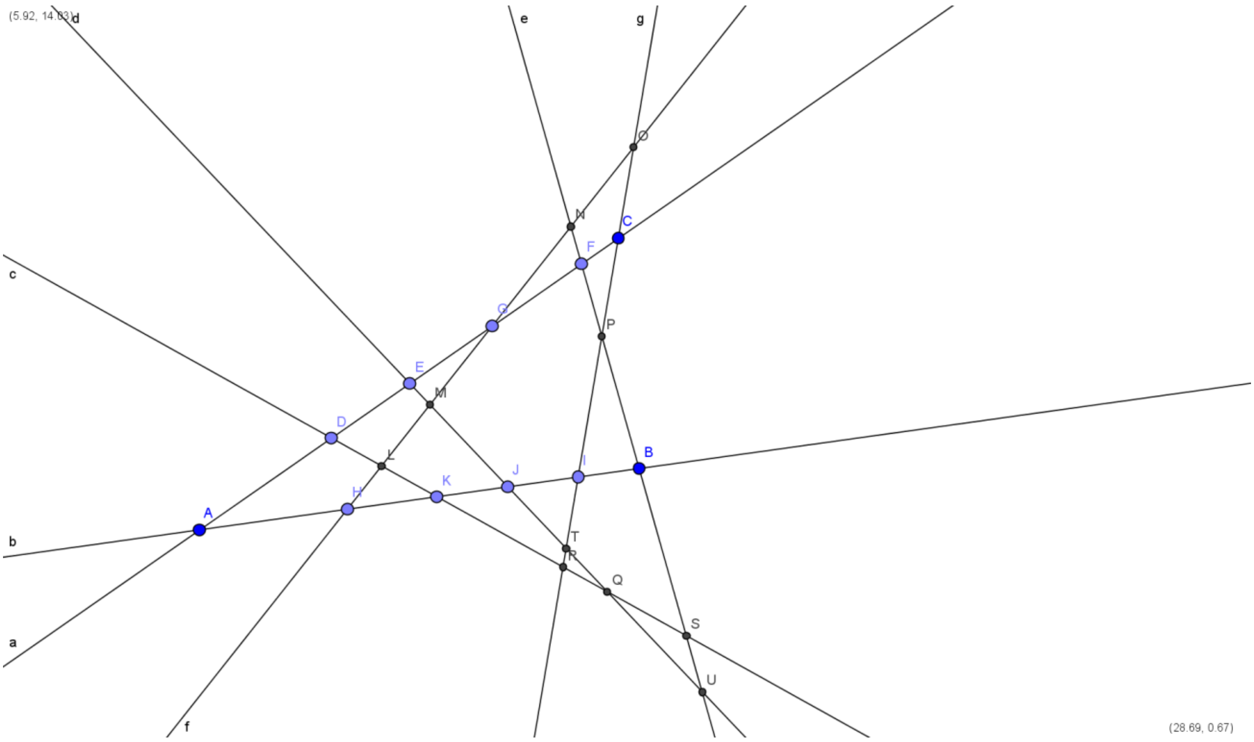
$f_4 = 3$


(5.92, 14.03)
e
g
d
T
C
U
F
E
G
M
P
B
H
I
c
D
J
K
O
Q
A
b
N
a
R
S
L
f
(28.69, 0.67)

$f_4 = 4$

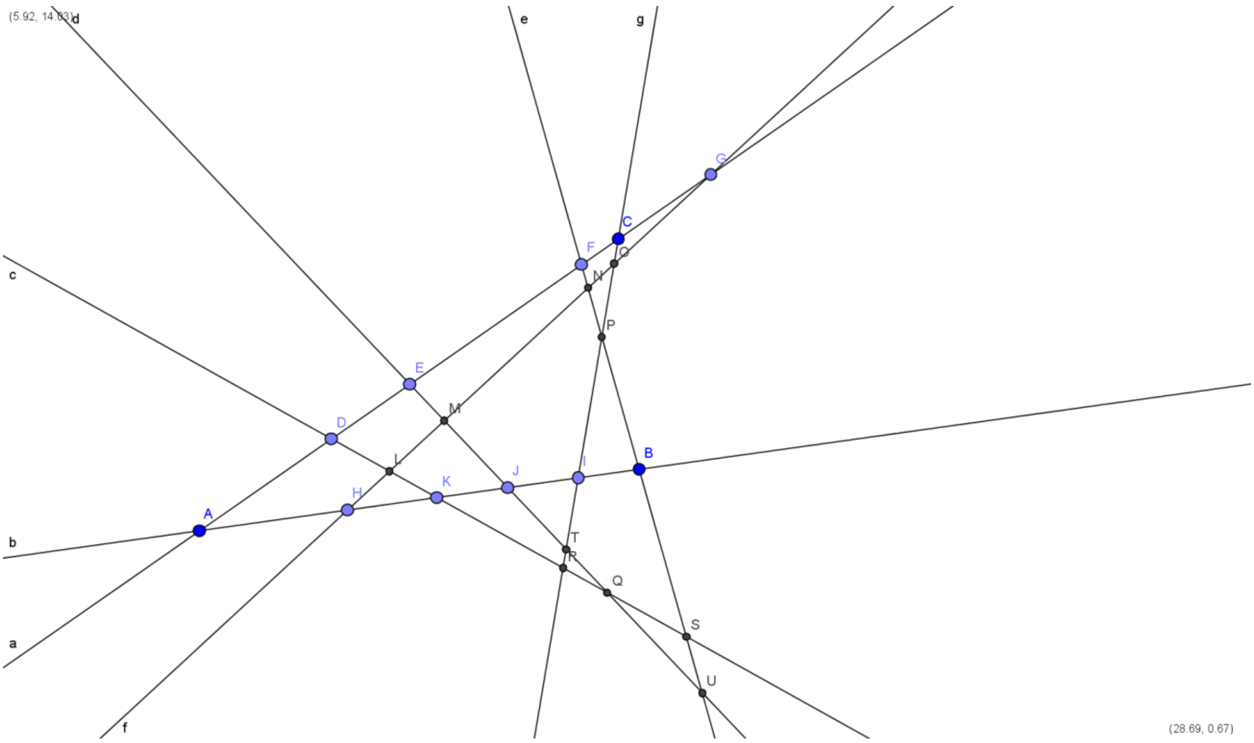

(5.92, 14.03)
e
g
C
G
F
d
N
E
B
I
H
J
M
P
c
T
U
D
K
L
R
S
Q
A
b
a
O
f
(28.69, 0.67)

$$f_4 = 5$$



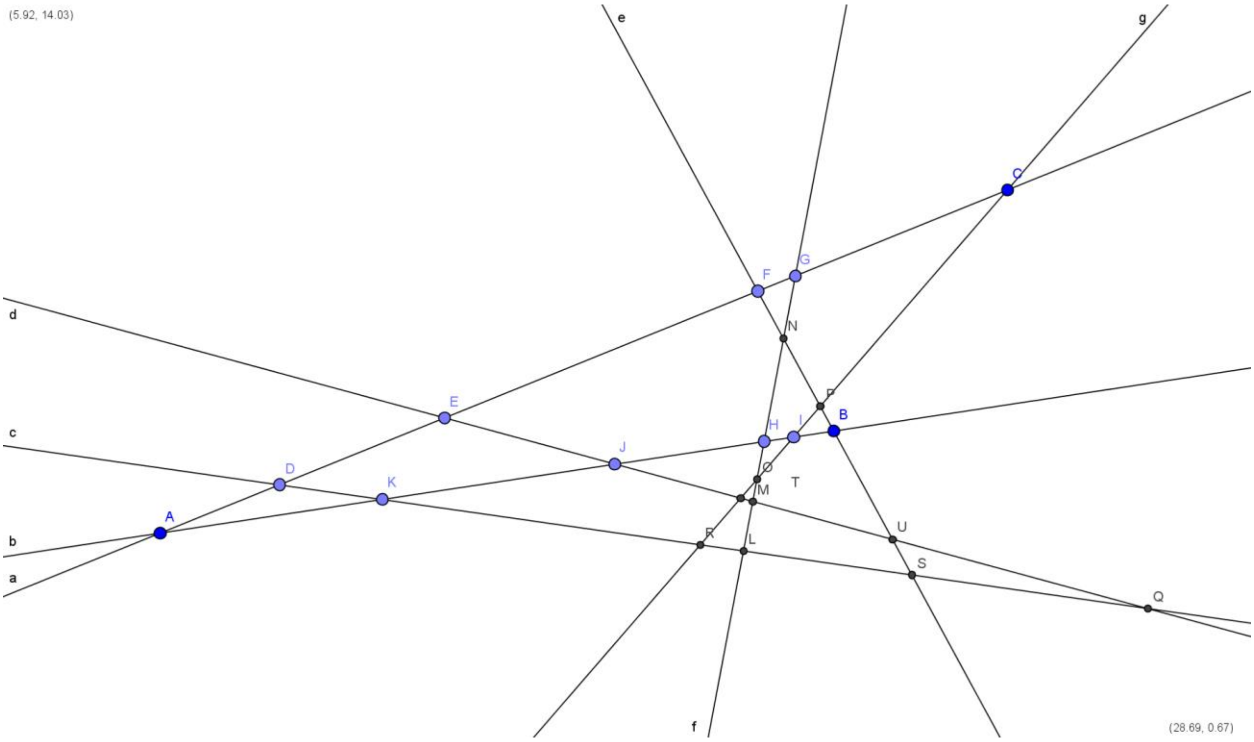
(5.92, 14.03)
d
e
g
O
N
C
F
G
P
E
M
D
L
J
I
B
K
H
A
T
R
Q
S
U
c
b
a
f
(28.69, 0.67)

$$f_4 = 6$$



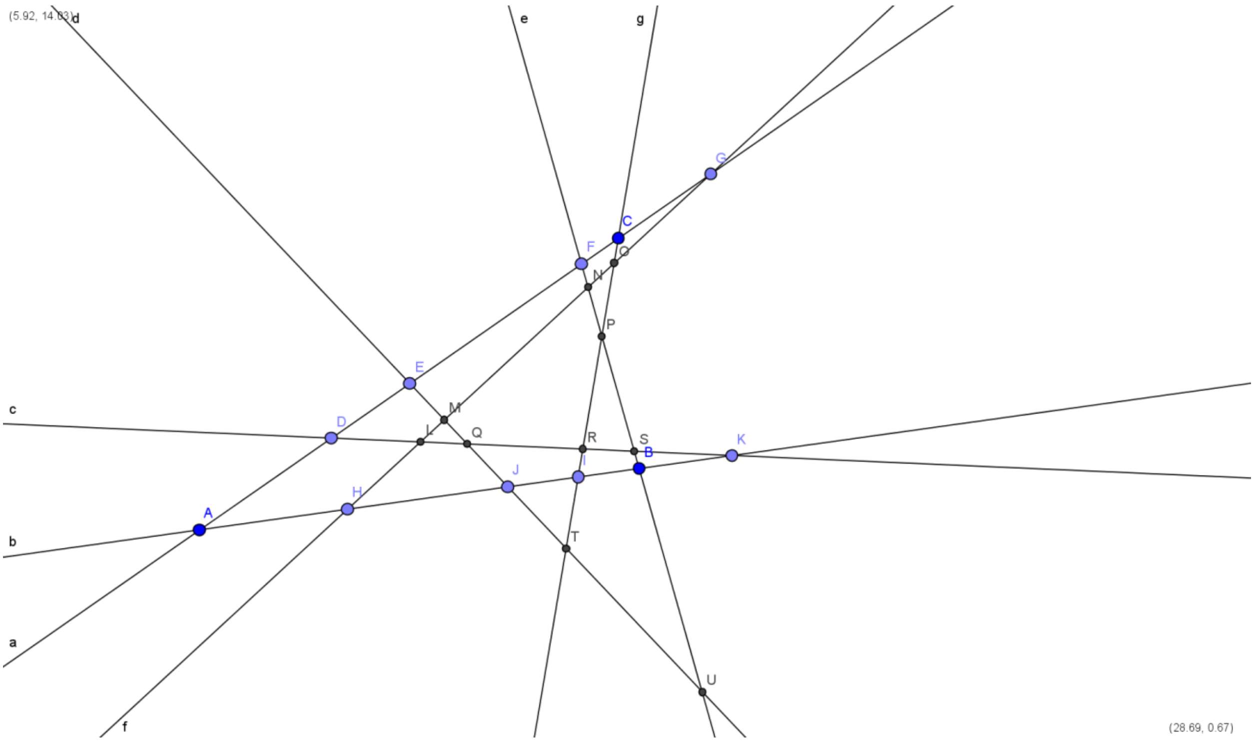
(5.92, 14.03)
d
e
g
G
C
F
O
N
P
E
M
D
L
J
I
B
K
H
A
T
R
Q
S
U
c
b
a
f
(28.69, 0.67)

$f_4 = 7$



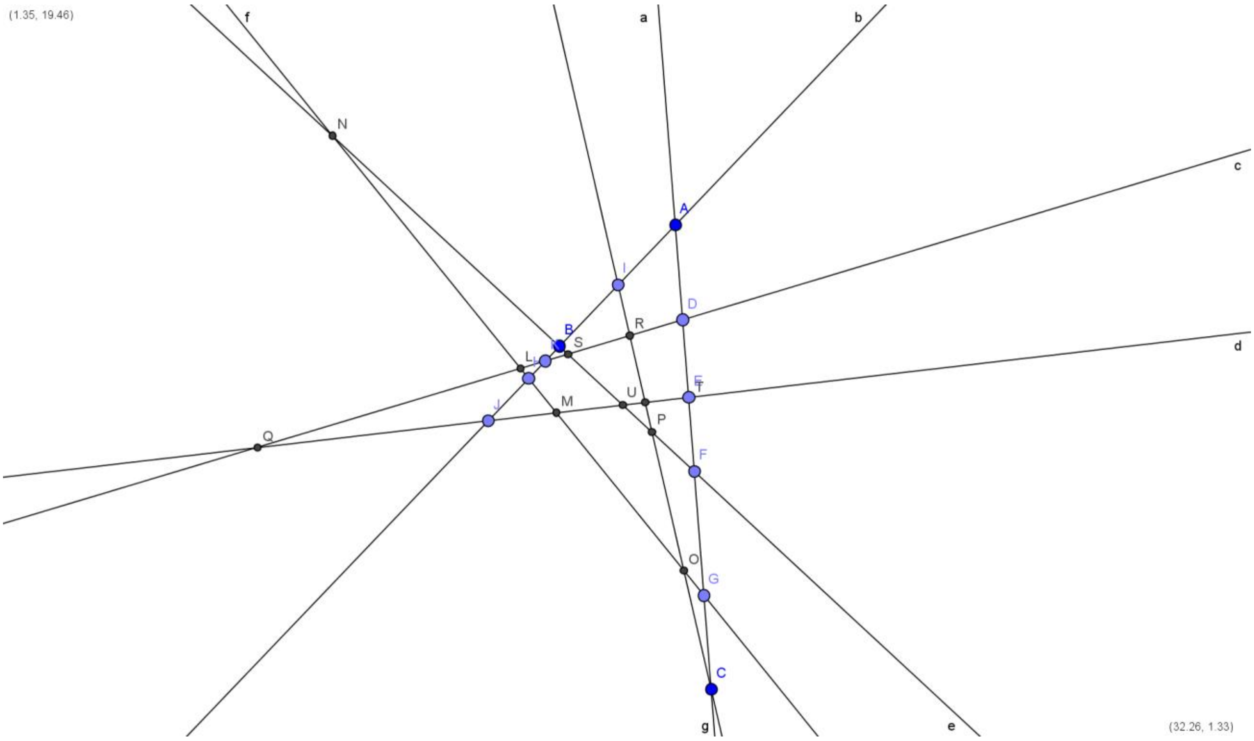
(5.92, 14.03)
e
g
C
F
G
d
N
P
E
B
c
H
I
J
D
O
T
K
M
A
b
R
L
U
a
S
Q
f
(28.69, 0.67)

$f_4 = 8$



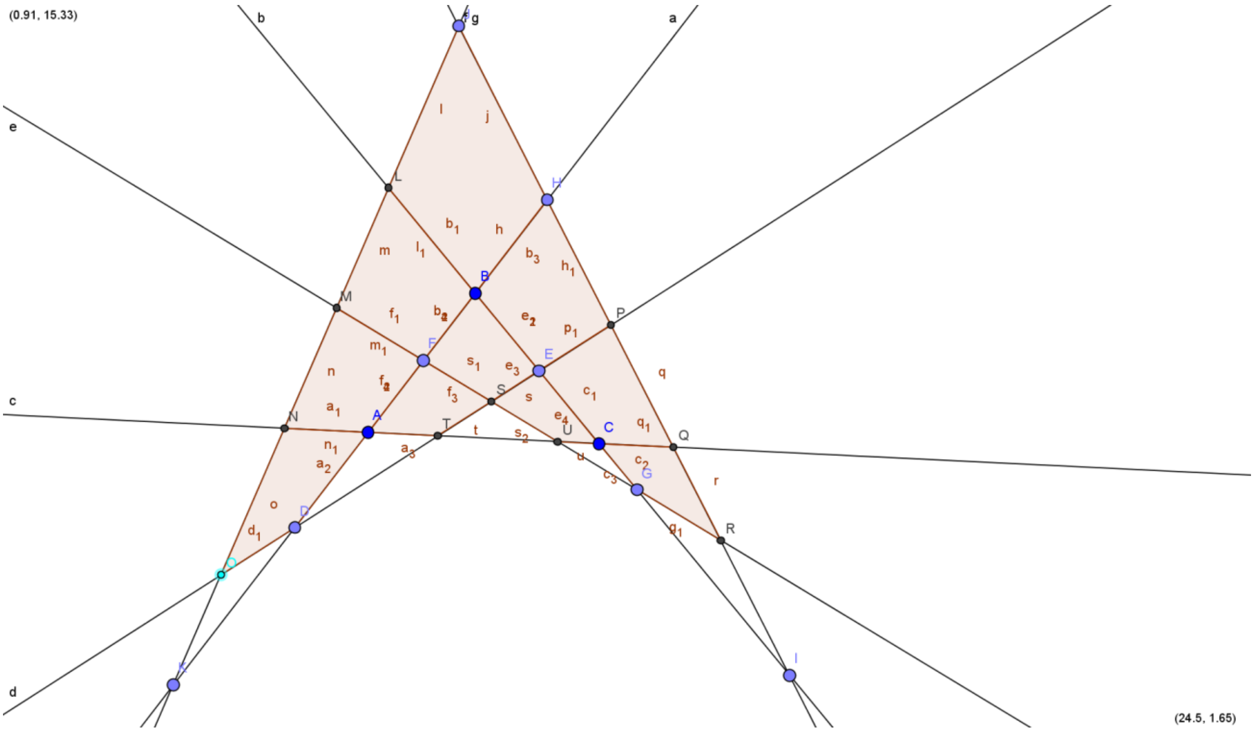
(5.92, 14.03)
d
e
g
G
C
F
O
N
P
E
M
c
D
L
Q
R
S
K
B
I
J
H
A
b
T
a
U
f
(28.69, 0.67)

$$f_4 = 9$$



(1.35, 19.46)
f
a
b
N
c
A
I
D
R
B
S
L
d
T
U
M
J
Q
P
F
O
G
C
g
e
(32.26, 1.33)

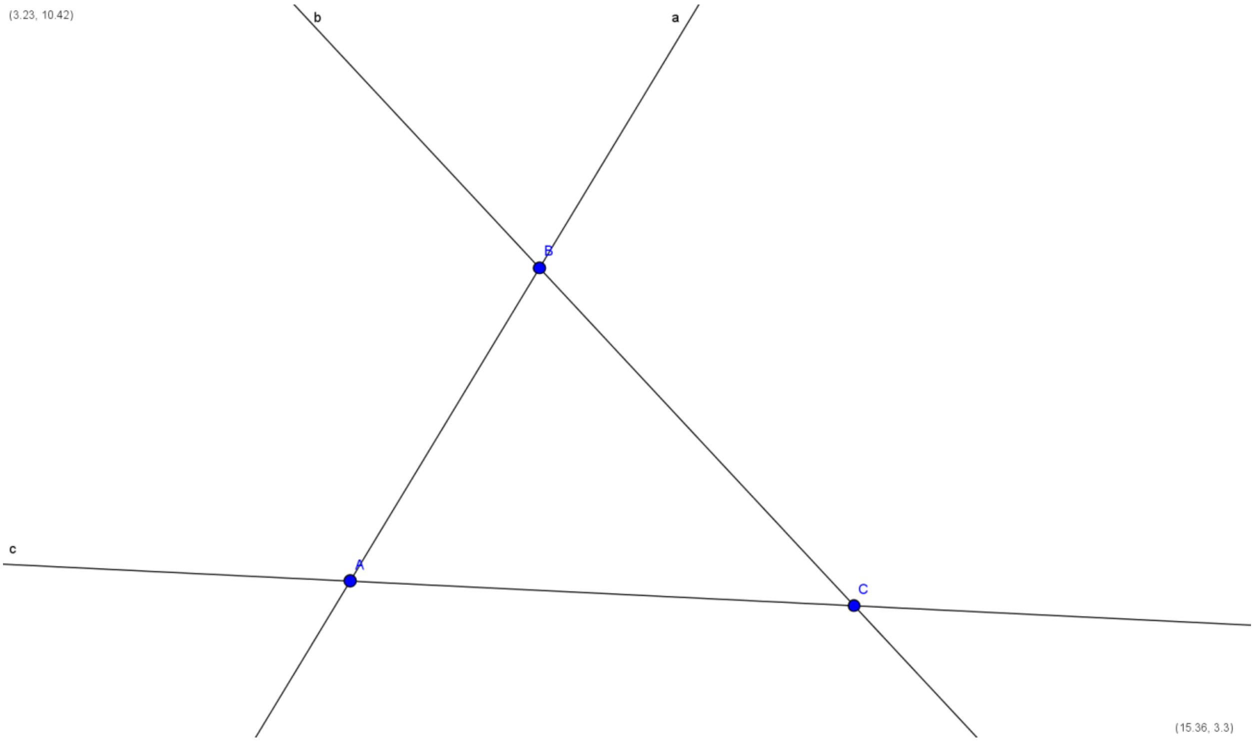
$$f_4 = 10$$

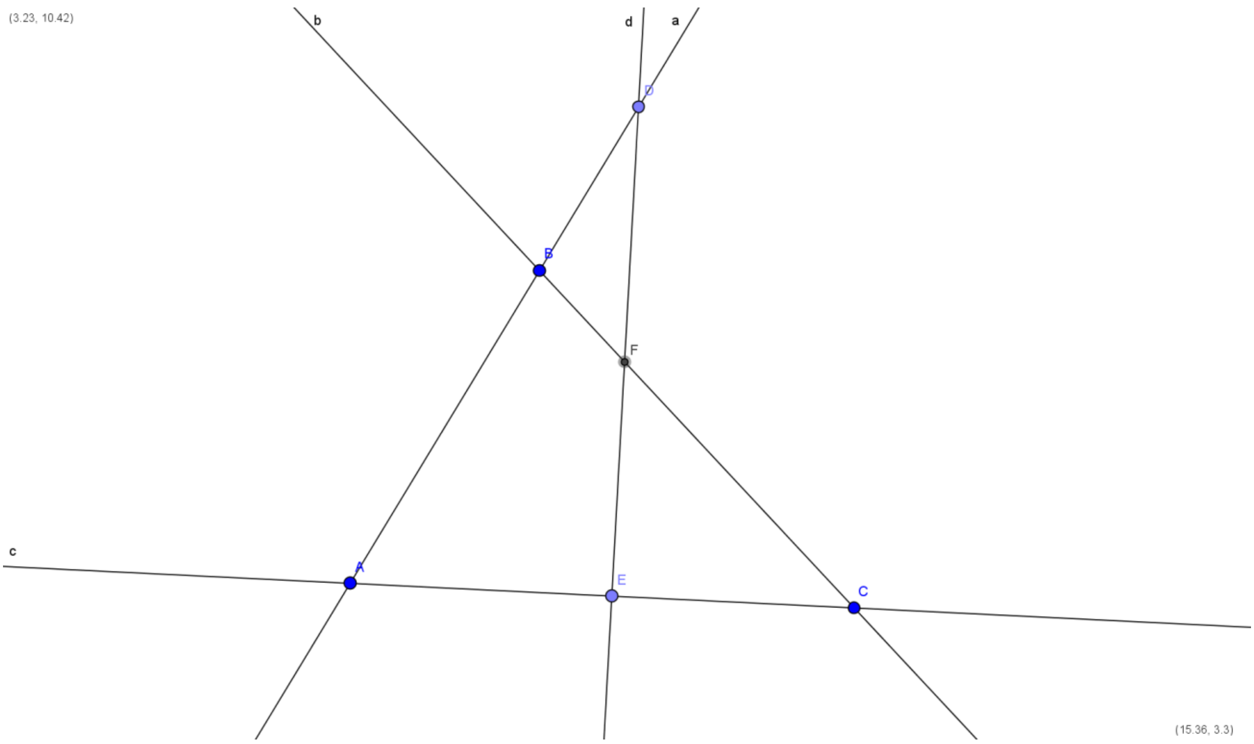


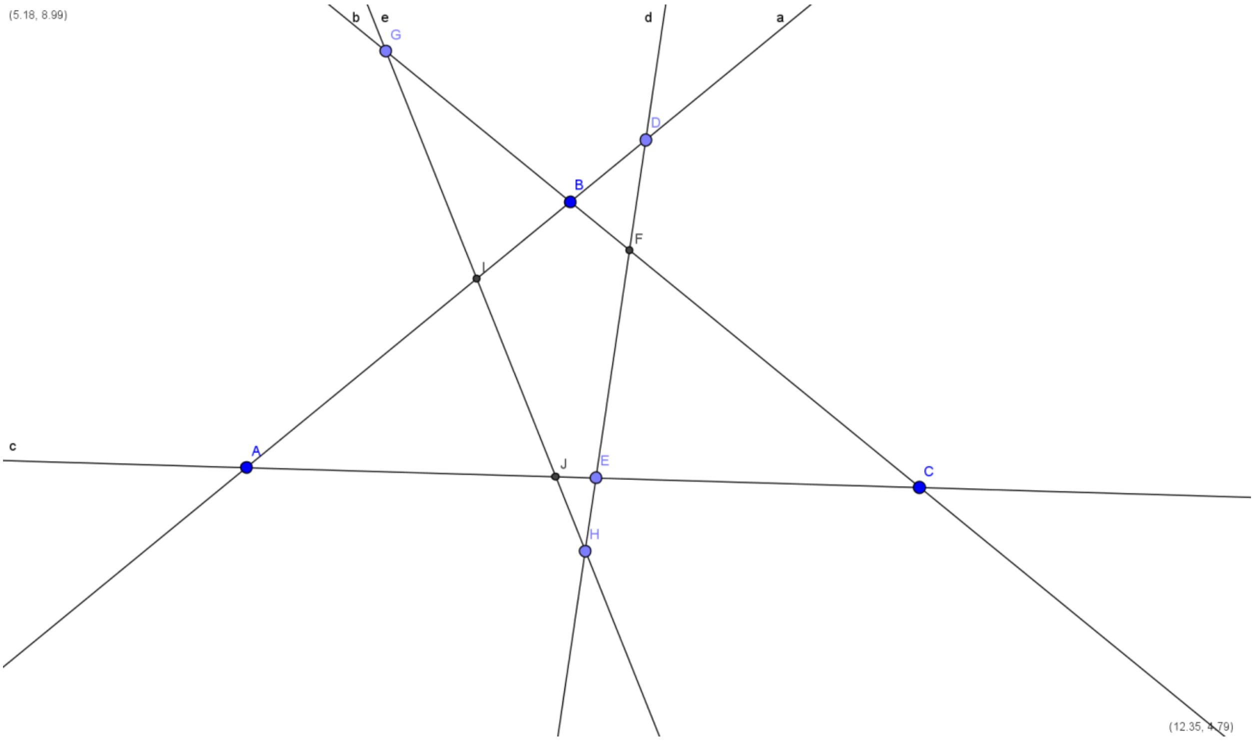
(0.91, 15.33)
b
g
a
e
L
H
B
M
P
F
E
c
N
A
T
S
U
C
Q
G
R
D
d
I
(24.5, 1.65)

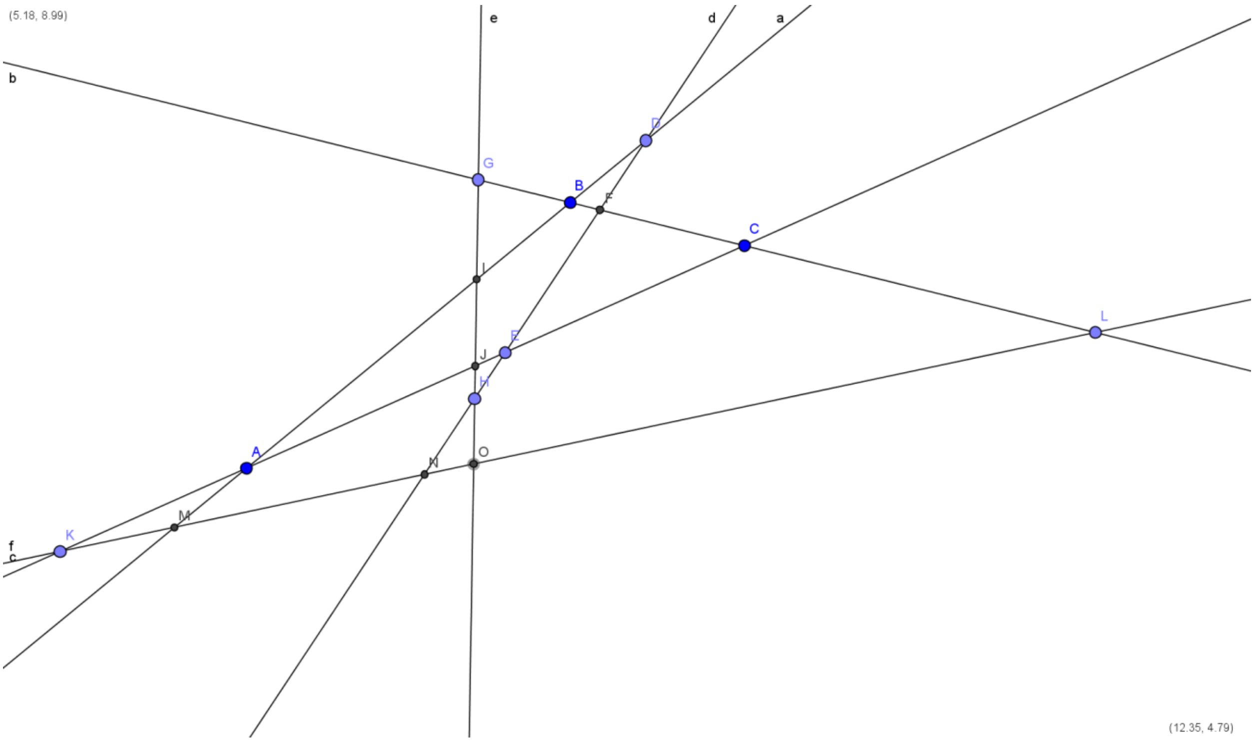
Также укажем расположение прямых с минимальным количеством элементарных четырёхугольников при $n = 3,4,5,6$

$$(f_4 = 0 \text{ при } n = 3,5,6, \text{ и } f_4 = 1 \text{ при } n = 4):$$



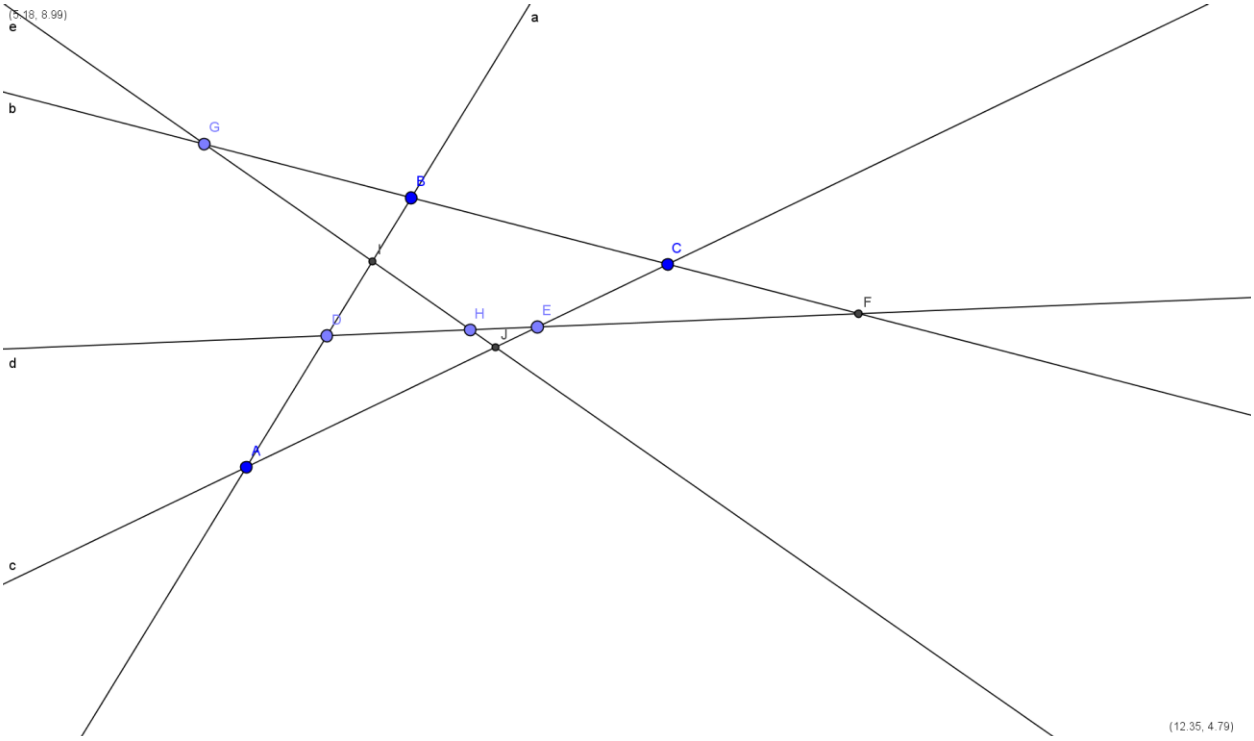




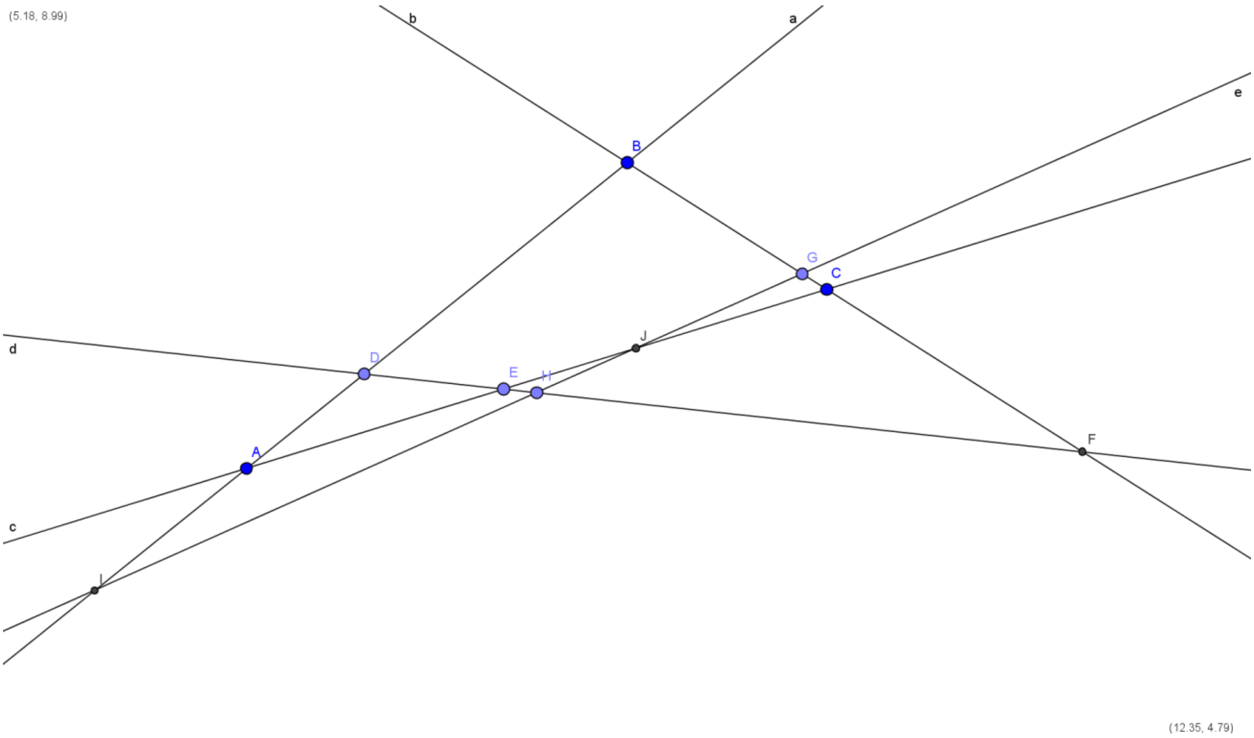


Укажем также расположение прямых с другими возможными значениями f_4 при $n = 5,6$ (при $n = 3,4$ возможные конфигурации и, понятно, векторы граней исчерпываются уже указанными).

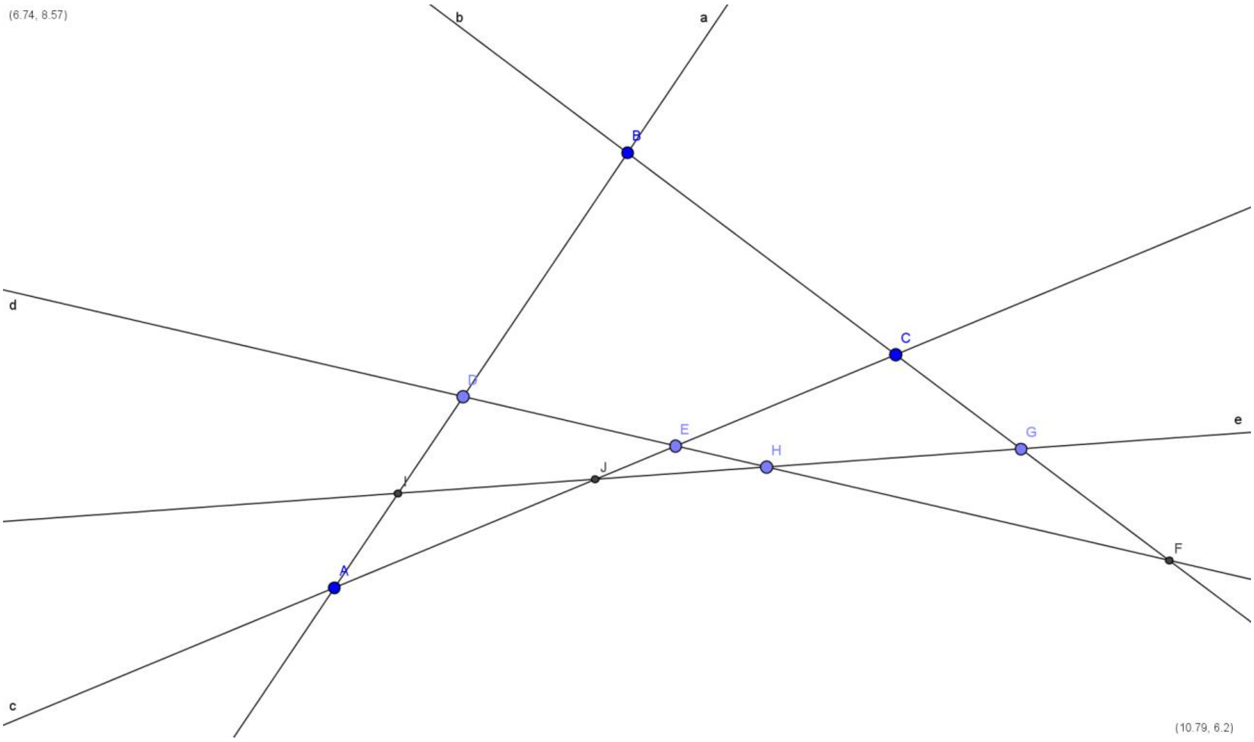
$n = 5, f_4 = 1$


(5.18, 8.99)
e
a
b
G
B
C
I
H
E
F
D
J
d
A
c
(12.35, 4.79)

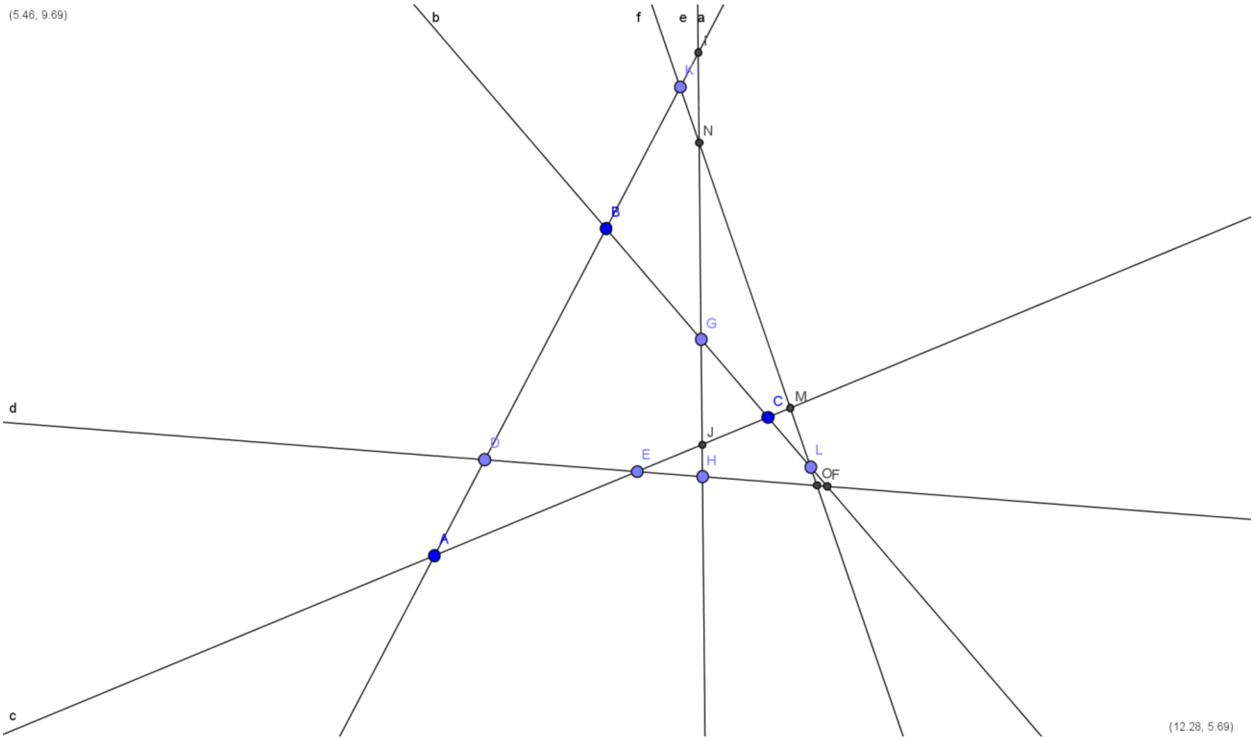
$n = 5, f_4 = 2$


(5.18, 8.99)
b
a
e
B
G
C
J
d
D
E
H
F
A
c
I
(12.35, 4.79)

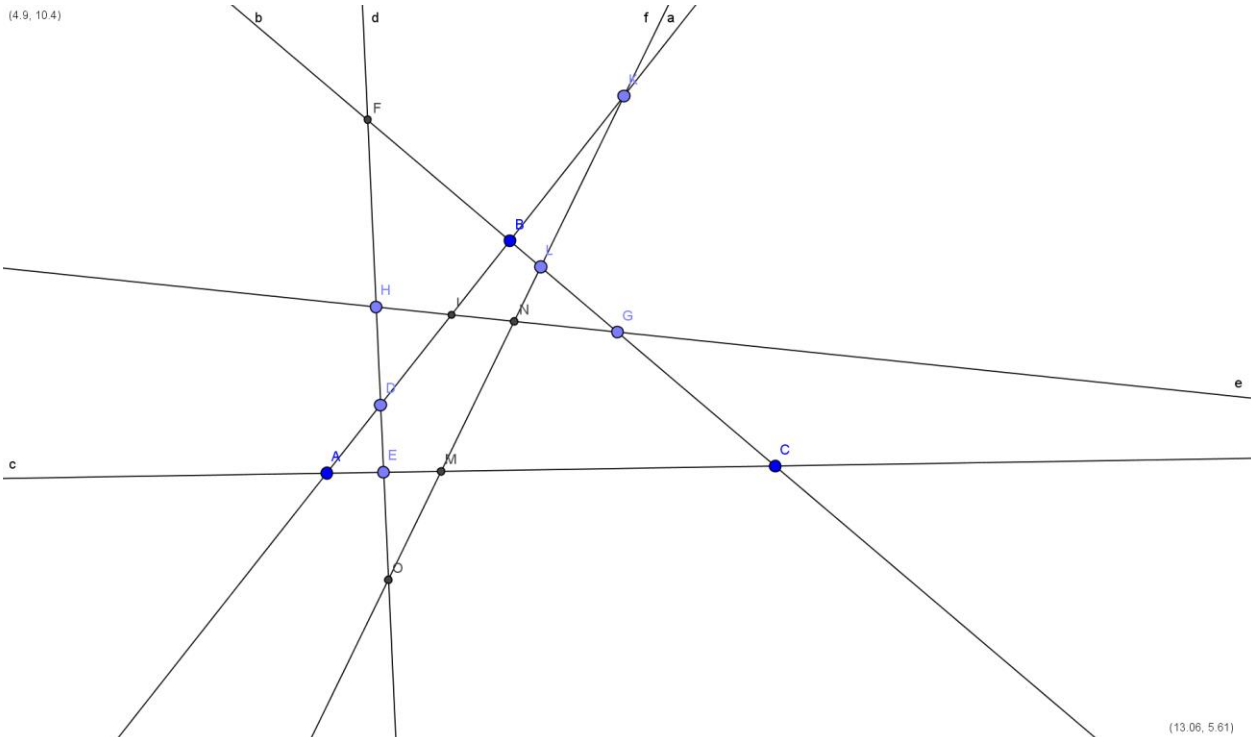
$$n = 5, f_4 = 3$$



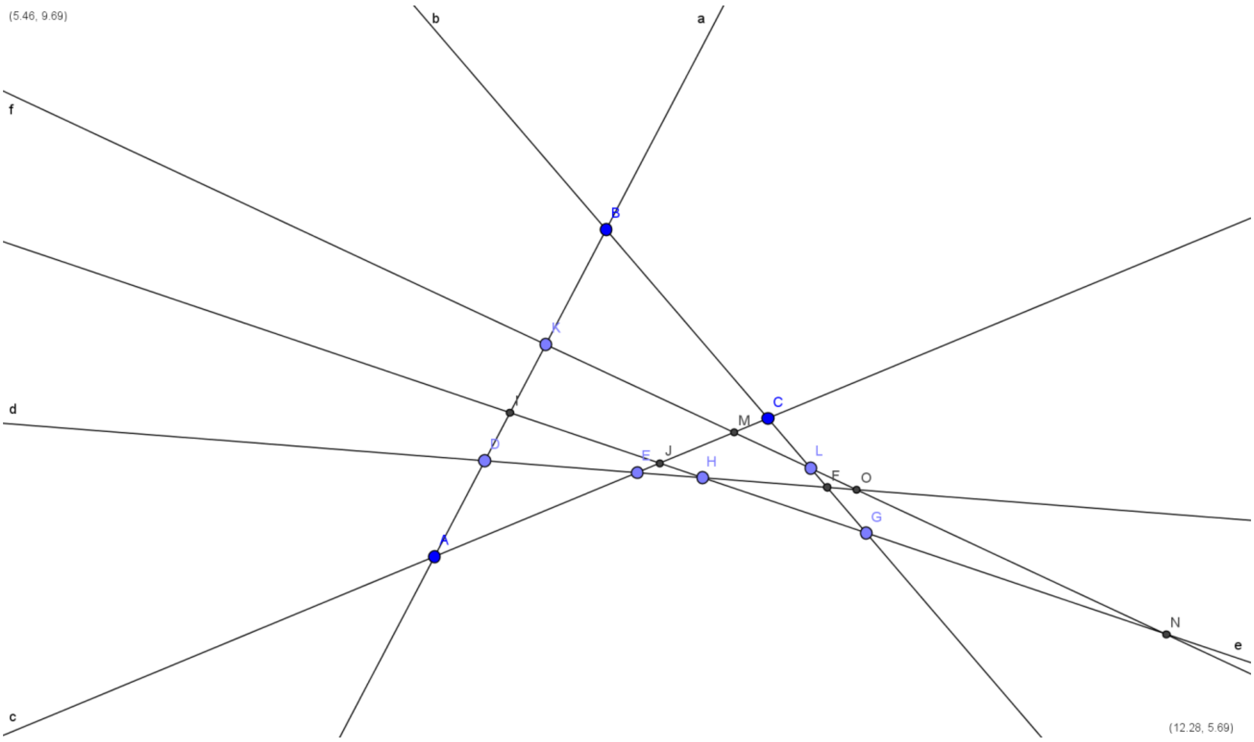
$n = 6, f_4 = 2$


(5.46, 9.69)
b
f
e
a
I
K
N
B
G
d
C
M
J
D
E
H
L
O
F
A
c
(12.28, 5.69)

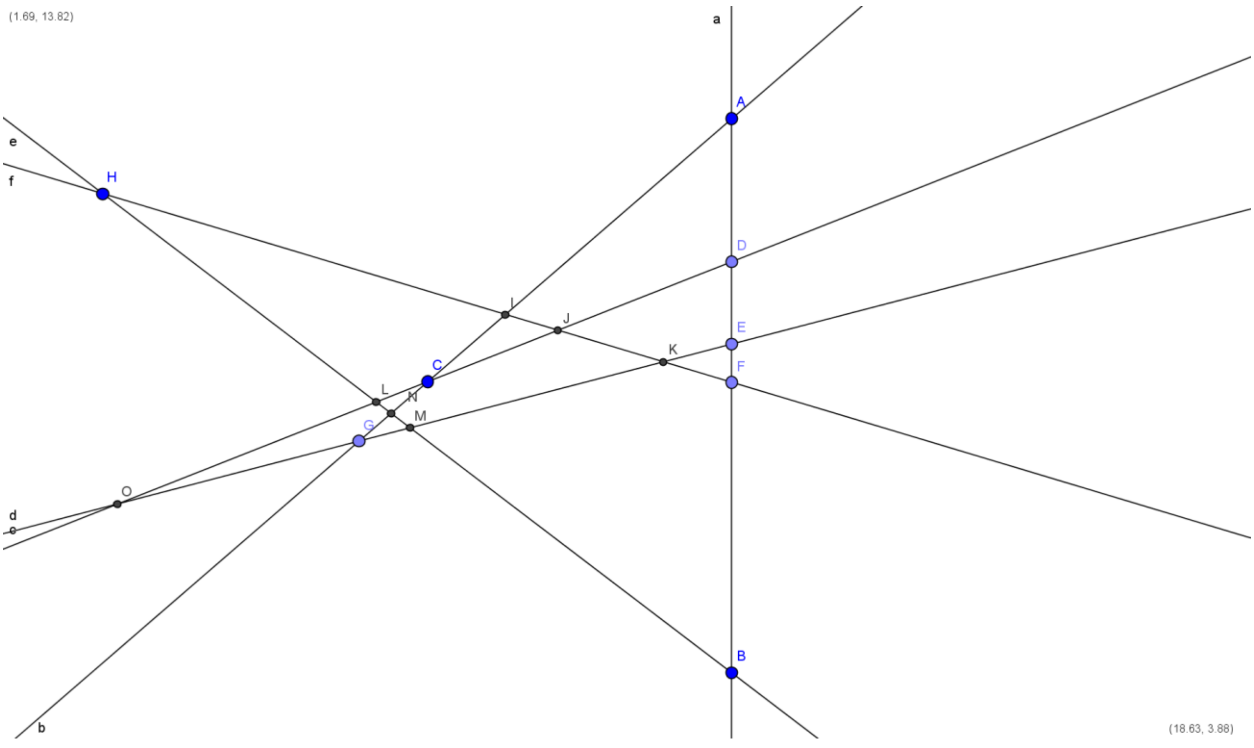
$6, f_4 = 3$


(4.9, 10.4)
b
d
f
a
K
F
B
L
H
I
N
G
e
D
c
A
E
M
C
O
(13.06, 5.61)

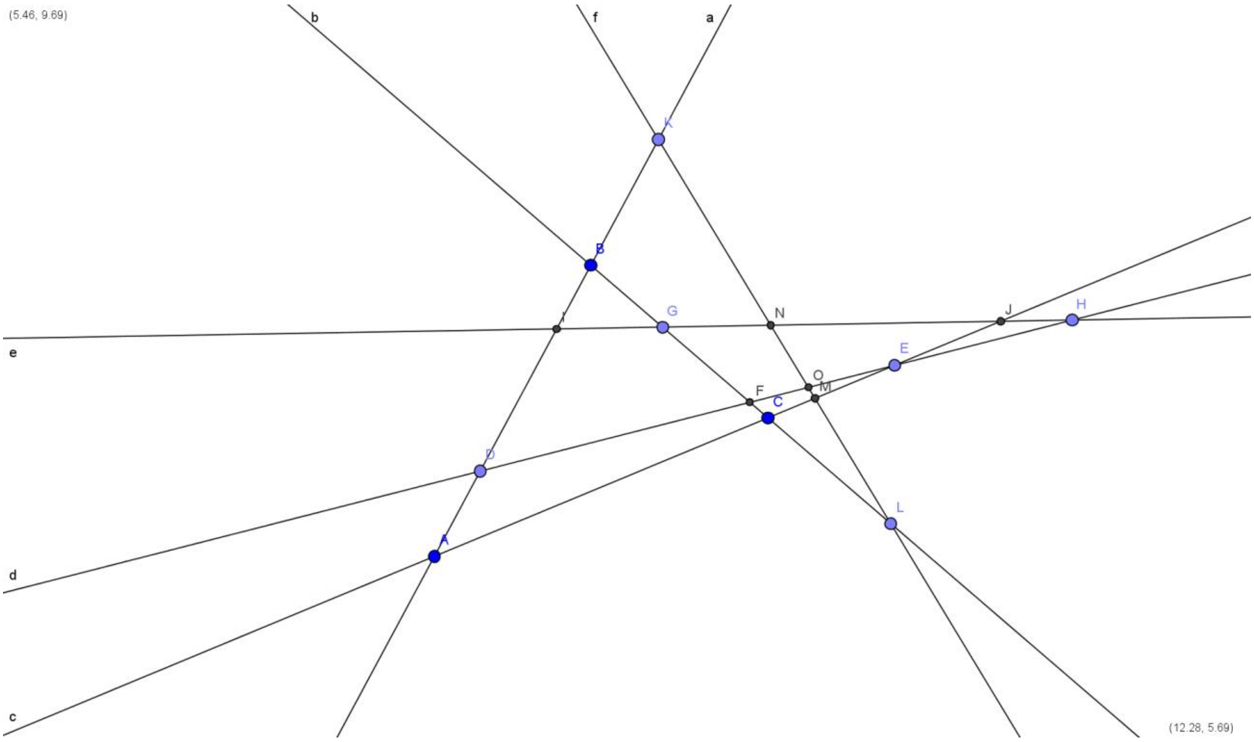
$$n = 6, f_4 = 4$$


(5.46, 9.69)
b
a
f
B
K
d
I
M
C
D
J
E
H
L
F
O
G
A
N
e
c
(12.28, 5.69)

$$n = 6, f_4 = 5$$


(1.69, 13.82)
a
A
e
f
H
D
I
J
E
K
C
F
L
N
M
G
O
d
c
B
b
(18.63, 3.88)

$$n = 6, f_4 = 6$$



В завершение приведём оценку сверху для количества элементарных четырёхугольников (пока без доказательства)

$$f_4 \leq \frac{(n-2)(n-3)}{2}\ .$$