ММ227. (7 баллов) *Пусть* $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s}$ *— каноническое разложение* n. *Обозначим через* $\mathrm{sopf}(n)$ *число* $p_1 + p_2 + \ldots + p_s$.

Назовём натуральное число k *слабым, если уравнение*

$$x = k \cdot \mathrm{sopf}(x) \tag{1}$$

не разрешимо в натуральных числах, и сильным в противном случае.

Доказать, что сильных чисел бесконечно много.

Найти наименьшее слабое число.

Доказать, что слабых чисел бесконечно много.

Ответ. Наименьшее слабое число — это 46.

Решение. Сначала докажем, что сильных чисел бесконечно много. Подставим $x = p^{a+1}$, где p — простое число, a — натуральное число, в уравнение (1). Получим

$$p^{a+1} = k \cdot p,$$

откуда

$$k = p^a.$$

Таким образом, для всех k, имеющих вид $k = p^a$, уравнение (1) имеет решение $x = p^{a+1}$, следовательно, все числа вида $k = p^a$ являются сильными. Их бесконечно много.

Далее найдём наименьшее слабое число. Все натуральные числа, меньшие 46, являются сильными, что видно из следующей таблицы, в которой для каждого k приведено наименьшее решение уравнения (1):

k	x	k	x
1	2	24	240
2	4	25	125
3	9	26	468
4	8	27	81
5	25	28	336
6	60	29	841
7	49	30	300
8	16	31	961
9	27	32	64
10	140	33	528
11	121	34	1122
12	120	35	490
13	169	36	360
14	168	37	1369
15	150	38	912
16	32	39	702
17	289	40	560
18	180	41	1681
19	361	42	504
20	280	43	1849
21	252	44	1144
22	572	45	450
23	529		

Теперь докажем, что число 46 слабое. Доказывать будем от противного. Предположим, что число 46 сильное. Тогда уравнение

$$x = 46 \cdot \mathrm{sopf}(x) \tag{2}$$

имеет некоторое натуральное решение x. Значит, число x делится на 2 и на 23, поэтому его можно записать в виде $x = 2 \cdot 23 \cdot y$, где y — натуральное число, и тогда уравнение (2) примет вид

$$2 \cdot 23 \cdot y = 2 \cdot 23 \cdot (2 + 23 + \mathrm{sopf}'(y)),$$

где через $\mathrm{sopf}'(y)$ обозначена сумма всех простых делителей числа y, кроме 2 и 23. Поделив последнее равенство на $2 \cdot 23$, запишем его в виде

$$y = 25 + \mathrm{sopf}'(y). \tag{3}$$

Докажем, что это уравнение не имеет натуральных решений. Для этого оценим левую и правую части уравнения (3). Пусть n — натуральное число такое, что

$$(n-1)^2 < y \leq n^2. \tag{4}$$

Тогда все простые делители числа y не превосходят n, поэтому сумма всех простых делителей числа y меньше суммы всех натуральных чисел от 1 до n, и справедлива оценка

$$25 + \mathrm{sopf}'(y) \leq 25 + \mathrm{sopf}(y) < 25 + (1 + 2 + \ldots + n) = 25 + \frac{n(n+1)}{2},$$

То есть правая часть уравнения (3) меньше $25 + \frac{n(n+1)}{2}$. А левая часть уравнения (3), согласно (4), будет больше $(n-1)^2$. Значит, если число n будет таково, что

$$(n-1)^2 > 25 + \frac{n(n+1)}{2}, \tag{5}$$

то уравнение (3) не имеет натуральных решений. Неравенство (5) выполняется для $n \in \left(-\infty, \frac{5-\sqrt{417}}{2}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{417}}{2}, +\infty\right)$, то есть для всех натуральных n, больших или равных 13. Значит, уравнение (3) не имеет натуральных решений, больших $12^2 = 144$. Затем для каждого натурального числа от 1 до 144 непосредственной подстановкой его в уравнение (3) убеждаемся, что оно не является его решением. Таким образом, доказано, что уравнение (3) не имеет натуральных решений, а следовательно, и эквивалентное ему уравнение (2) не имеет натуральных решений. Значит, число 46 является слабым. А поскольку все натуральные числа, меньшие 46, являются сильными, то число 46 является наименьшим слабым числом.

Теперь докажем, что слабых чисел бесконечно много. Рассмотрим уравнение (1) при $k = 2^p \cdot 23^q$, где p и q — произвольные натуральные числа:

$$x = 2^p \cdot 23^q \cdot \mathrm{sopf}(x). \tag{6}$$

Если такое уравнение имеет натуральное решение x, то это решение можно представить в виде $x = 2^p \cdot 23^q \cdot y$, где y — натуральное число, и тогда уравнение (6) примет вид

$$2^p \cdot 23^q \cdot y = 2^p \cdot 23^q \cdot (2 + 23 + \mathrm{sopf}'(y)).$$

Поделив его на $2^p \cdot 23^q$, получим уравнение (3), которое, как мы доказали выше, не разрешимо в натуральных числах. Значит, не разрешимо в натуральных числах и уравнение (6), поэтому число $k = 2^p \cdot 23^q$ для любых натуральных p и q является слабым, а следовательно, слабых чисел бесконечно много.