О. Б. Полубасов   14.07.2017 г.

===========MM226================

MM226 (5 баллов)

Решения принимаются до 13.10.2017.

Назовем натуральное число n счастливым, если оно является точной седьмой степенью, а седьмой (при упорядочении по возрастанию) натуральный делитель n равен количеству натуральных делителей n.

А есть ли, вообще, счастье в жизни? В смысле, существуют ли счастливые числа?

==========================

По теореме Ферма, для любых простых p и m, p ≠ m: $p^{m-1} - 1 = 0\ (mod\ m)$, поэтому число $n = p^{p^{m-1}-1}$:

1. является точной m-й степенью;
2. имеет p^{m-1} натуральных делителей: 1, p, p^2, … , $p^{p^{m-1}-1}$;
3. m-й по величине натуральный делитель n равен p^{m-1}.

Ответ. Для любого простого p, кроме 7, число $n = p^{p^6-1}$ – счастливое.

Интересно, есть ли другие семейства счастливых чисел? Кроме того, не все хотят в жизни простого человеческого счастья, – некоторые хотят не простого. Поэтому проверим, как обстоят дела со счастьем и для составных m, и для m = 1.

Пусть $n = \prod_{i=1}^{s} p_i^{q_i}$ – каноническое разложение n. Чтобы n было точной m-ой степенью, требуется, чтобы все q_i были кратны m: $n = \prod_{i=1}^{s} p_i^{mr_i}$. Тогда количество натуральных делителей n: $\tau = \prod_{i=1}^{s}(mr_i + 1)$.

Поскольку у счастливых чисел τ должно быть делителем n, то $\tau = \prod_{i=1}^{t} p_i^{u_i}$, причём, t ≤ s, $u_i \le mb_i$.

С другой стороны, $s \le \sum_{i=1}^{t} u_i$.

Наименьший натуральный делитель любого числа равен 1, один делитель имеет только число 1, следовательно, если m = 1, то n = 1.

Если m-й по величине натуральный делитель прост, то τ содержит только один множитель, значит, делитель равен p_1, а m = 2.

Следовательно, при m > 2 m-й по величине натуральный делитель должен быть составным.

Все возможные варианты для m = 1..7 сведены в таблицы, которые по причине своей объёмности вынесены в приложение. Счастья оказалось очень много. Наименьшими счастливыми числами являются следующие.

m	1	2	3	4	5	6	7
Наименьшее n	1	3^2	2^3	$5^4 7^4$	2^{15}	$5^6 7^6$	$2^7 67^7$

Приложение

a, b, c, d, e, f – различные простые числа.

m	Условия	n	Наименьшее n
1	-	1	1
2	$a \neq 2$	a^{a-1}	3^2
3	$a \neq 3$	a^{a^2-1}	2^3
	$a^2 < b$ a = 1 (mod 3)	$a^{a-1}b^{a-1}$	$7^6 53^6$
4	a = 1 (mod 4)	a^{a^3-1}	5^{124}
	$a^3 < (b, c)$ a = 1 (mod 4)	$a^{a^2-1}b^{a-1}$	$5^{24} 127^4$
		$a^{a-1}b^{a^2-1}$	$5^4 127^{24}$
		$a^{a-1}b^{a-1}c^{a-1}$	$5^4 127^4 131^4$
	$a < b < a^2$ a = 1 (mod 4)	$a^{a-1}b^{a-1}$	$5^4 7^4$
5	$a \neq 5$	a^{a^4-1}	2^{15}
	$a^4 < b$ a = ±1 (mod 5)	$a^{a^2-1}b^{a^2-1}$	$11^{120} 14653^{120}$
	$a^4 < (b, c, d)$ a = 1 (mod 5)	$a^{a^3-1}b^{a-1}$	$11^{1330} 14653^{10}$
		$a^{a-1}b^{a^3-1}$	$11^{10} 14653^{1330}$
		$a^{a^2-1}b^{a-1}c^{a-1}$	$11^{120} 14653^{10} 14657^{10}$
		$a^{a-1}b^{a^2-1}c^{a-1}$	$11^{10} 14653^{120} 14657^{10}$
		$a^{a-1}b^{a-1}c^{a-1}d^{a-1}$	$11^{10} 14653^{10} 14657^{10} 14669^{10}$
	$a^2 < b < a^3 < c$ a = 1 (mod 5)	$a^{a^2-1}b^{a-1}$	$11^{120} 131^{10}$
		$a^{a-1}b^{a^2-1}$	$11^{10} 131^{120}$
		$a^{a-1}b^{a-1}c^{a-1}$	$11^{10} 131^{10} 1361^{10}$
	$a < b < a^2$ a = 1 (mod 5) b = 1 (mod 5)	$a^{b-1}b^{a-1}$	$11^{30} 31^{10}$
		$a^{a-1}b^{b-1}$	$11^{10} 31^{30}$

Таб. 1. Семейства счастливых чисел при m = 1..5.

Условия	n	Наименьшее n
a = 1 (mod 6)	a^{a^5-1}	7^{16806}
$a^5 < (b, c, d, e)$ a = 1 (mod 6)	$a^{a^4-1}b^{a-1}$	$7^{2400}16811^{6}$
	$a^{a-1}b^{a^4-1}$	$7^{6}16811^{2400}$
	$a^{a^3-1}b^{a^2-1}$	$7^{342}16811^{48}$
	$a^{a^2-1}b^{a^3-1}$	$7^{48}16811^{342}$
	$a^{a^2-1}b^{a^2-1}c^{a-1}$	$7^{48}16811^{48}16823^{6}$
	$a^{a-1}b^{a^2-1}c^{a^2-1}$	$7^{6}16811^{48}16823^{48}$
	$a^{a^2-1}b^{a-1}c^{a-1}d^{a-1}$	$7^{48}16811^{6}16823^{6}16829^{6}$
	$a^{a-1}b^{a^2-1}c^{a-1}d^{a-1}$	$7^{6}16811^{48}16823^{6}16829^{6}$
	$a^{a-1}b^{a-1}c^{a-1}d^{a-1}e^{a-1}$	$7^{6}16811^{6}16823^{6}16829^{6}16831^{6}$
$a^3 < b < a^4$ a = ±1 (mod 6)	$a^{a^2-1}b^{a^2-1}$	$5^{24}127^{24}$
$a^3 < b < a^4 < (c, d)$ a = 1 (mod 6)	$a^{a^3-1}b^{a-1}$	$7^{342}347^{6}$
	$a^{a-1}b^{a^3-1}$	$7^{6}347^{342}$
	$a^{a^2-1}b^{a-1}c^{a-1}$	$7^{48}347^{6}2411^{6}$
	$a^{a-1}b^{a^2-1}c^{a-1}$	$7^{6}347^{48}2411^{6}$
	$a^{a-1}b^{a-1}c^{a^2-1}$	$7^{6}347^{6}2411^{48}$
	$a^{a-1}b^{a-1}c^{a-1}d^{a-1}$	$7^{48}347^{6}2411^{6}2417^{6}$
$a < b < a^2 < ab < a^3$ $a^3 < (b^2, c)$ a = 1 (mod 6)	$a^{a^2-1}b^{a-1}$	$7^{48}19^{6}$
	$a^{a-1}b^{a^2-1}$	$7^{6}19^{48}$
	$a^{a-1}b^{a-1}c^{a-1}$	$7^{6}19^{6}347^{6}$
$a < a^2 < b < c < a^3$ $a^3 < b^2$ a = 1 (mod 6)	$a^{a-1}b^{a-1}c^{a-1}$	$7^{6}53^{6}59^{6}$
$a^2 < b < a^3$ a = 1 (mod 6) b = 1 (mod 6)	$a^{b-1}b^{a-1}$	$7^{60}61^{6}$
	$a^{a-1}b^{b-1}$	$7^{6}61^{60}$
$b < a^2 < ab < b^2$ b = 1 (mod 6)	$a^{b-1}b^{b-1}$	$5^{6}7^{6}$

Таб. 2. Семейства счастливых чисел при m = 6.

Условия	n	Наименьшее n
$a \neq 7$	a^{a^6-1}	2^{63}
$a^6 < b$ $a = \{1, 2, 4\} \pmod 7$	$a^{a^3-1}b^{a^3-1}$	$2^{7}67^{7}$
$a^6 < (b, c)$ $a = \pm 1 \pmod 7$	$a^{a^4-1}b^{a^2-1}$	$13^{28560}4826813^{168}$
	$a^{a^2-1}b^{a^4-1}$	$13^{168}4826813^{28560}$
	$a^{a^2-1}b^{a^2-1}c^{a^2-1}$	$13^{168}4826813^{168}4826831^{168}$
$a^6 < (b, c, d, e, f)$ $a = 1 \pmod 7$	$a^{a^5-1}b^{a-1}$	$29^{20511148}594823337^{28}$
	$a^{a-1}b^{a^5-1}$	$29^{28}594823337^{20511148}$
	$a^{a^4-1}b^{a-1}c^{a-1}$	$29^{707280}594823337^{28}594823351^{28}$
	$a^{a-1}b^{a^4-1}c^{a-1}$	$29^{28}594823337^{707280}594823351^{28}$
	$a^{a^3-1}b^{a^2-1}c^{a-1}$	$29^{24388}594823337^{840}594823351^{28}$
	$a^{a^2-1}b^{a^3-1}c^{a-1}$	$29^{840}594823337^{24388}594823351^{28}$
	$a^{a-1}b^{a^3-1}c^{a^2-1}$	$29^{28}594823337^{24388}594823351^{840}$
	$a^{a^2-1}b^{a^2-1}c^{a-1}d^{a-1}$	$29^{840}594823337^{840}594823351^{28}594823357^{28}$
	$a^{a^2-1}b^{a-1}c^{a^2-1}d^{a-1}$	$29^{840}594823337^{28}594823351^{840}594823357^{28}$
	$a^{a^2-1}b^{a-1}c^{a-1}d^{a-1}e^{a-1}$	$29^{840}594823337^{28}594823351^{28}594823357^{28}$ $^{*}594823373^{28}$
	$a^{a-1}b^{a^2-1}c^{a^2-1}d^{a-1}e^{a-1}$	$29^{28}594823337^{840}594823351^{28}594823357^{28}$ $^{*}594823373^{28}$
	$a^{a-1}b^{a-1}c^{a-1}d^{a-1}e^{a-1}f^{a-1}$	$29^{28}594823337^{28}594823351^{28}594823357^{28}$ $^{*}594823373^{28}594823391^{28}$
$a^4 < b < a^5 < (c, d, e)$ $a = 1 \pmod 7$	$a^{a^4-1}b^{a-1}$	$29^{707280}707293^{28}$
	$a^{a-1}b^{a^4-1}$	$29^{28}707293^{707280}$
	$a^{a^3-1}b^{a^2-1}$	$29^{24388}707293^{840}$
	$a^{a^2-1}b^{a^3-1}$	$29^{840}707293^{24388}$
	$a^{a^2-1}b^{a^2-1}c^{a-1}$	$29^{840}707293^{840}20511157^{28}$
	$a^{a^2-1}b^{a-1}c^{a^2-1}$	$29^{840}707293^{28}20511157^{840}$
	$a^{a-1}b^{a^2-1}c^{a^2-1}$	$29^{28}707293^{840}20511157^{840}$
	$a^{a^2-1}b^{a-1}c^{a-1}d^{a-1}$	$29^{840}707293^{28}20511157^{28}20511217^{28}$
	$a^{a-1}b^{a^2-1}c^{a-1}d^{a-1}$	$29^{28}707293^{840}20511157^{28}20511217^{28}$
	$a^{a-1}b^{a-1}c^{a^2-1}d^{a-1}$	$29^{28}707293^{28}20511157^{840}20511217^{28}$
	$a^{a-1}b^{a-1}c^{a-1}d^{a-1}e^{a-1}$	$29^{28}707293^{28}20511157^{28}20511217^{28}$ $*20511221^{28}$
$a^2 < b < a^3$ $a = \pm 1 \pmod 7$	$a^{a^2-1}b^{a^2-1}$	$13^{168}173^{168}$
$a^2 < (b, c) < a^3$ $a^4 < d$ $a = 1 \pmod 7$	$a^{a^3-1}b^{a-1}$	$29^{24388}853^{28}$
	$a^{a-1}b^{a^3-1}$	$29^{28}853^{24388}$
	$a^{a^2-1}b^{a-1}c^{a-1}$	$29^{840}853^{28}857^{28}$
	$a^{a-1}b^{a^2-1}c^{a-1}$	$29^{28}853^{840}857^{28}$
	$a^{a-1}b^{a-1}c^{a-1}d^{a-1}$	$29^{28}853^{28}857^{28}707293^{28}$
$a^2 < b < a^3$ $a^4 < (c, d)$ $a = 1 \pmod 7$	$a^{a^2-1}b^{a-1}c^{a-1}$	$29^{840}853^{28}707293^{28}$
	$a^{a-1}b^{a^2-1}c^{a-1}$	$29^{28}853^{840}707293^{28}$
	$a^{a-1}b^{a-1}c^{a^2-1}$	$29^{28}853^{28}707293^{840}$
	$a^{a-1}b^{a-1}c^{a-1}d^{a-1}$	$29^{28}853^{28}707293^{28}707299^{28}$
$b < a^2 < ab < b^2 < a^3 < c$ $a = 1 \pmod 7$	$a^{a^2-1}b^{a-1}$	$29^{840}31^{28}$
	$a^{a-1}b^{a^2-1}$	$29^{840}31^{28}$
	$a^{a-1}b^{a-1}c^{a-1}$	$29^{28}31^{28}24391^{28}$
$b < a^2 < (ab, c) < a^3 < b^2$ $a = 1 \pmod 7$	$a^{a-1}b^{a-1}c^{a-1}$	$29^{28}157^{28}853^{28}$
$a^3 < b < a^4$ $a = 1 \pmod 7$ $b = 1 \pmod 7$	$a^{b-1}b^{a-1}$	$29^{24390}24391^{28}$
	$a^{a-1}b^{b-1}$	$29^{28}24391^{24390}$
$b < a^2 < ab < a^3 < b^2$ $b = 1 \pmod 7$	$a^{b-1}b^{b-1}$	$7^{28}29^{28}$

Таб. 3. Семейства счастливых чисел при $m = 7$.