226)

Решим задачу в общем виде, заменив 7 на a. Пусть p – простое число, дающее остаток 1 при делении на a. Тогда $p^{p^{a-1}-1}$ имеет ровно p^{a-1} делителей, из которых a -ый по величине это p^{a-1}. Кроме того, поскольку $p^{a-1}-1$ кратно a, число является точной a -ой степенью.

Например для семи годится число 29^{29^6-1}.

Найдем наименьшее счастливое число для семи. Разложим седьмой по возрастанию делитель на простые множители. Возможны следующие варианты

1) В разложении минимум три простых p, q, r. Тогда $1, p, q, r, pq, qr, pr$ - семь делителей, меньших нашего.

2) В разложении одно простое. То есть его число делителей p^k, $k \leq 6$ (иначе он опять же не седьмой по возрастанию). Тогда наше число содержит не более k простых, причем их степени делятся на 7 и равны p^l-1 при подходящем l.

3) В разложении два простых. Тогда это pq или pq^2 - прочие варианты дают много делителей, меньших этого. Тогда в в разложении самого числа два простых первом случае или два или три во втором, причем два из них это p и q, степени у всех кратны 7 и равны $p-1, q-1$ в первом случае, $p-1, pq-1$ или $q-1, p^2-1$ или $p-1, q-1, p-1$ во втором.

Ясно, что этих условий недостаточно - седьмой делитель может не совпасть с тем, чего хотим мы. Однако это уже дает возможность запустить перебор маленьких чисел.

Вот что мне удавалось придумать в порядке убывания.

Например, подходит $2^{63}=512^7$. (случай 2)

А еще $2^7 \cdot 67^7 = 134^7$ (тоже случай 2)

Можно также решить эту задачу, считая, что делители упорядочены наоборот. Пусть число представлено в виде $p_1^a p_2^a \dots p_k^a$, где некоторые простые могут совпадать. Тогда a -ый делитель не меньше, чем $p_1 p_2^a \dots p_k^a$ (поскольку $p_1^2 p_2^a \dots p_k^a, p_1^3 p_2^a \dots p_k^a, \dots p_1^a p_2^a \dots p_k^a$ – тоже делители). С другой стороны, количество делителей не превосходит $2\sqrt{p_1^a p_2^a \dots p_k^a}$.

Если в разложении числа участвует лишь одно простое в степени a, то мы должны иметь $p=a+1$. Поэтому задача разрешима, если $a+1$ - простое число. Например, 7^6 имеет ровно 7 делителей, что совпадает с его седьмым по убыванию делителем.

Если же таких простых минимум два (возможно, совпадающих), то имеем

$2\sqrt{p_1^a p_2^a \dots p_k^a} \geq p_1 p_2^a \dots p_k^a$ и (аналогично) $2\sqrt{p_1^a p_2^a \dots p_k^a} \geq p_1^a p_2 \dots p_k^a$. Перемножая и сокращая, получим $4 \geq p_1 p_2$, откуда единственная возможность – $p_1=p_2=2$. Поскольку это рассуждение применимо к любым простым множителям, число должно быть степенью двойки.

Пусть это 2^{ka}, тогда число его делителей $ka+1$, а a- ый делитель – 2^{ka-a+1}.

$2^{ka-a+1}=ka+1$

Если $k=1$, то $a=1$. Это возможно для числа 2. Но $a+1$ простое число, так что этот ответ уже есть.

Если $k=2$, то $2^{a+1}=2a+1$, что невозможно из-за четности.

Если же $k \geq 3$, то $2^{ka-a+1} \geq 2^{ka/2} \geq 3ka > ka+1$ при $ka \geq 6$ ($2^x > 6x$ при $x \geq 6$). Поэтому если это и возможно, то только при $a=1$, а этот ответ уже есть (можно разобрать и убедиться,что невозможны другие ответы).

Ответ на исходную задачу - да, например 134^7