

225) Очевидно $a = -1.5$ не подходит. Тогда уравнение действительно квадратное. По теореме Виета его сумма и произведение корней $-\frac{-a}{2a+3}, \frac{3a-1}{2a+3}$ — целые числа, тогда и сумма второго выражения с утроенным первым $\frac{-1}{2a+3}$ — целое число. Пусть $2a+3 = \frac{1}{n}$, где n — целое. Тогда имеем

$$\frac{1}{n}x^2 + \left(\frac{1}{2n} - 1.5\right)x + \left(\frac{3}{2n} - 5.5\right) = 0$$

$$2x^2 + (1 - 3n)x + (3 - 11n) = 0$$

Это уравнение имеет целые корни. Значит, его дискриминант — точный квадрат.

$$1 - 6n + 9n^2 - 24 + 88n = b^2$$

$$9n^2 + 82n - 23 = b^2$$

$$81n^2 + 9 \cdot 82n - 207 = 9b^2$$

$$(9n + 41)^2 - 1888 = 9b^2$$

$$(9n + 3b + 41)(9n - 3b + 41) = 2^5 \cdot 59$$

Множители отличаются на $6b$, то есть сравнимы по модулю 6. Будем считать b положительным, тогда первая скобка больше второй. При этом их сумма дает остаток 1 при делении на 9, а сами они — остаток 2 при делении на 3. Это дает варианты

1) $9n + 3b + 41 = 16 \cdot 59, 9n - 3b + 41 = 2$, откуда $n = 48, b = 157$. Корни уравнения $\frac{143 \pm 157}{4}$, только один из них целый.

2) $9n + 3b + 41 = 4 \cdot 59, 9n - 3b + 41 = 8$, откуда $n = 9, b = 38$. Корни уравнения $\frac{26 \pm 38}{4}$, они целые $(-3, 16)$. Значит $a = \frac{-13}{9}$

3) $9n + 3b + 41 = -4, 9n - 3b + 41 = -8 \cdot 59$, откуда $n = -31, b = 78$. Корни уравнения $\frac{-94 \pm 78}{4}$, они целые $(-4, -43)$. Значит $a = \frac{-47}{31}$

4) $9n + 3b + 41 = -16, 9n - 3b + 41 = -2 \cdot 59$, откуда $n = -12, b = 17$. Корни уравнения $\frac{-37 \pm 17}{4}$, только один из них целый.

Ответ $a = \frac{-13}{9}, a = \frac{-47}{31}$