***Задача 220 (5 баллов)***

***Ответ:*** -искомое значение равно 163;

-для каждого $v\geq 4$ найдено множество значений $D\left(v\right)$, которые может принимать количество диагоналей многогранника с $v$вершинами (формула(7));

-найдены все 168 значений $v$ таких, что существует выпуклый многогранник с $ v $ вершинами и 2016 диагоналями;

-для каждого $r=1,…,2200$ найдено минимальное значение $v$ такое, что существует выпуклый многогранник с $v$ вершинами и $r$ диагоналями, а выпуклый многогранник с $v+1$ вершинами и $r$ диагоналями не существует;

-сделаны некоторые обобщения на случае большего числа измерений.

***Решение:*** Обозначим через $f,e,v-$ количество граней, рёбер и вершин многогранника, и пусть $m=(m\_{1},…,m\_{f})$ упорядоченный набор чисел, где $ m\_{i}$ - количество сторон $i-ой $ грани:

$3\leq m\_{1}\leq m\_{2}\leq …\leq m\_{f}$*.* (1)

Диагонали многогранника это те отрезки, соединяющие вершины многогранника, которые не являются ни рёбрами, ни диагоналями граней. От общего числа отрезков, соединяющих вершины многогранника, отнимаем количество рёбер и общее количество диагоналей всех граней и получаем количество диагоналей

$d=\frac{v(v-1)}{2}-e-\sum\_{i=1}^{f}\frac{m\_{i}(m\_{i}-3)}{2}$.

А с учётом $e=\frac{1}{2}\sum\_{i=1}^{f}m\_{i}$, получаем

$d(v,m)=\frac{v(v-1)}{2}-\sum\_{i=1}^{f}\frac{m\_{i}(m\_{i}-2)}{2}$ . (2)

Найдем максимальное количество диагоналей многогранника при фиксированном количестве вершин. Для этого нам потребуется исследование некоторой операции перехода от данного многогранника к другому многограннику.

***Операция переламывания грани:*** В грани графа, соответствующего данному многограннику, содержащей $k>3$ сторон, проведем диагональ, разбивающую её на многоугольники, содержащие $k\_{1}\geq 3$ и $k\_{2}\geq 3$ сторон, причём $k\_{1}+k\_{2}=k+2$. Тогда в образовавшемся графе количество вершин осталось без изменения, а количество диагоналей в соответствующем многограннике увеличивается на величину

$δ=\frac{k\left(k-2\right)-k\_{1}\left(k\_{1}-2\right)-k\_{2}\left(k\_{2}-2\right)}{2}=\frac{(k\_{1}+k\_{2}-2)(k\_{1}+k\_{2}-4)-k\_{1}\left(k\_{1}-2\right)-k\_{2}\left(k\_{2}-2\right)}{2}=\left(k\_{1}-2\right)\left(k\_{2}-2\right)>0$(3)

Так что, если в многограннике есть грань, отличная от треугольной, то после её переламывания мы получим новый многогранник с большим количеством диагоналей. Таким образом, максимальное количество диагоналей при фиксированном количестве вершин многогранника достигается в случае, когда соответствующий граф является триангуляцией. В этом случае количество граней определяется однозначно $f=2v-4$, и потому из формулы (2) определяем количество диагоналей

$$d=\frac{v(v-1)}{2}-\frac{3\left(2v-4\right)}{2}=\frac{(v-3)(v-4)}{2}$$

Понятно, что минимальное количество диагоналей многогранника при фиксированном количестве вершин равно 0 и реализуется для

$ \left(v-1\right)-$угольной пирамиды. В результате получаем точную оценку для количества диагоналей выпуклого многогранника с $v$ вершинами

$0\leq d\leq \frac{(v-3)(v-4)}{2}$(4)

Для дальнейшего нам потребуется уже известная лемма

***Лемма*** Если$ числа $$α,β$таковы, что $α\geq β$, то

 $\left(α+1\right)\left(α-1\right)+\left(β-1\right)\left(β-3\right)>α\left(α-2\right)+β(β-2)$.

***Доказательство*** $\left(α+1\right)\left(α-1\right)+\left(β-1\right)\left(β-3\right)-α\left(α-2\right)-β\left(β-2\right)=$

$=2α-2β+2>0$*.*

 Из леммы следует, что если в наборе чисел (1) есть пара чисел, отличающихся больше, чем на 1, то увеличив на 1 меньшее из них и уменьшив на 1 большее из них, мы увеличим значение выражения (2). А если для первоначального набора и изменённого набора чисел существуют соответствующие многогранники, то при переходе ко второму многограннику количество его диагоналей увеличится по сравнению с количеством диагоналей исходного многогранника.

Исследуем возможное количество диагоналей выпуклого многогранника при фиксированном количестве вершин $v$, а также при фиксированном количестве $k$ сторон грани, содержащей наибольшее количество сторон.

1 случай: $k\geq \frac{v}{2}+1$

Рассмотрим многогранник $M(v,k)$, в котором вторая по количеству сторон грань содержит максимальное количество сторон, то есть $(v-k+2)$. Тогда получается, что каждая вершина многогранника принадлежит хотя бы одной из этих двух граней, и пусть количество треугольных граней равно $(2k-v)$, а количество четырёхугольных граней равно $(v-k-1)$

На рисунке для примера изображён граф для многогранника с $v=20,k=13$.

Набор (1) для такого многогранника удовлетворяет следующему условию:

При фиксированных значениях $v$ и $k$ второе по величине значение $m\_{f-1}$ максимально возможное, третье по величине $m\_{f-2}$ максимально возможное, и т.д. Из леммы следует, таким образом, что для такого многогранника количество диагоналей минимально возможное и равно

$$d\_{1}\left(v,k\right)=\frac{v\left(v-1\right)}{2}-\frac{k\left(k-2\right)}{2}-\frac{\left(v-k+2\right)\left(v-k\right)}{2}-\frac{\left(v-k-1\right)∙4∙2}{2}-\frac{\left(2k-v\right)∙3}{2}=\left(k-4\right)\left(v-k-1\right).$$

 Далее, последовательно применяя операцию переламывания четырёхугольных граней (при каждом таком переламывании, как следует из (3), мы увеличиваем количество диагоналей на 1), получаем многогранники с диагоналями в количестве равном $d\_{1}\left(v,k\right)+1, d\_{1}\left(v,k\right)+2, …,d\_{1}\left(v,k\right)+v-k-1.$ Возвращаемся к исходному многограннику и переламываем грань, содержащую $(v-k+2)$ вершин с образованием треугольной грани и грани, содержащей $(v-k+1)$ вершин. В результате получим многогранник $M\_{1}$ с $d\_{1}\left(v,k\right)+v-k-1$ диагоналями, а далее аналогично предыдущему, последовательно применяя операцию переламывания четырёхугольных граней, получаем многогранники с диагоналями в количестве равном $d\_{1}\left(v,k\right)+v-k, …,d\_{1}\left(v,k\right)+2v-2k-1$. На следующем шаге возвращаемся к многограннику $M\_{1}$ и переламываем грань, содержащую $(v-k+1)$ вершин с образованием треугольной грани и грани, содержащей $(v-k)$ вершин. В результате получим многогранник с $d\_{1}\left(v,k\right)+2v-2k-3$ диагоналями, а далее аналогично предыдущему, последовательно применяя операцию переламывания четырёхугольных граней, получаем многогранники с диагоналями в количестве равном $d\_{1}\left(v,k\right)+2v-2k-2, …,d\_{1}\left(v,k\right)+3v-3k-4$. И так далее, действуя аналогично, мы уменьшаем количество сторон во второй по количеству сторон грани, и в результате придём к многограннику, у которой все грани, кроме одной, наибольшей, треугольные. Для такого многогранника количество диагонали равно

$d\_{2}\left(v,k\right)=\frac{(v-k-1)(v+k-6)}{2}$*.*

И это максимально возможное количество диагоналей при фиксированных значениях $v$ и $k$. Таким образом, всевозможные значения количества диагоналей при фиксированных значениях $v$ и $k$ заполняют весь диапазон

$d\_{1}\left(v,k\right)\leq d\leq d\_{2}\left(v,k\right)$(5)

2 случай: $k<\frac{v}{2}+1$

В этом случае, как следует из леммы, наименьшее значение количество диагоналей для всех $k<\frac{v}{2}+1$ не меньше, чем количество диагоналей многогранника $M(v,k\_{0})$, где

$$k\_{0}=\left\{\begin{array}{c}\frac{v}{2}+1 при чётном v,\\\frac{v+1}{2}+1 при нечётном v.\end{array}\right.$$

Стартуя с многогранника $M(v,k\_{0})$, применим уже описанную последовательность операций переламывания сначала ко второй по количеству сторон грани, а затем к грани, содержащей наибольшее количество сторон. Заметим, что зазор в количестве диагоналей, появляющийся при переламывании больших граней не превосходит $k\_{0}-3$, а количество четырёхугольных граней равно $\frac{v}{2}-2=k\_{0}-3$ для чётных $v$ и $\frac{v+1}{2}-2=k\_{0}-4$ для нечётных $v$. И этого хватает, чтобы заполнить все промежуточные значения. В результате мы получим все значения для количества диагоналей в диапазоне

$d\_{1}\left(v,k\_{0}\right)\leq d\leq \frac{(v-3)(v-4)}{2}$ (6)

Объединяя все диапазоны, мы получим множество значений, которые принимает количество диагоналей в выпуклом многограннике с $v$ вершинами

 $D\left(v\right)=\left[\left(k\_{0}-4\right)\left(v-k\_{0}-1\right),\frac{\left(v-3\right)\left(v-4\right)}{2}\right]∪$

$$\bigcup\_{k\geq \frac{v}{2}+1}^{}\left[\left(k-4\right)\left(v-k-1\right),\frac{(v-k-1)(v+k-6)}{2}\right]$$

Заметим, что при $k\leq \frac{3}{2}+v-\frac{\sqrt{9+8v}}{2}$

$$d\_{2}\left(v,k\right)\geq d\_{1}\left(v,k+1\right)-1$$

и отрезки диапазонов (5) для соседних *k* перекрываются, а при $k>\frac{3}{2}+v-\frac{\sqrt{9+8v}}{2}$

$d\_{2}\left(v,k\right)<d\_{1}(v,k+1)$,

 и в множестве $D\left(v\right)$ образуются пустоты. Таким образом, при $k\_{+}=\left⌈\frac{3}{2}+v-\frac{\sqrt{9+8v}}{2}\right⌉$ мы можем указать наибольший отрезок $\left[d\_{1}\left(v,k\_{+}\right),\frac{\left(v-3\right)\left(v-4\right)}{2}\right]$, содержащийся в множестве $D\left(v\right)$. Так что

$$D\left(v\right)=\left[\left(k\_{+}-4\right)\left(v-k\_{+}-1\right),\frac{\left(v-3\right)\left(v-4\right)}{2}\right]∪$$

$\bigcup\_{k>k\_{+}}^{}\left[\left(k-4\right)\left(v-k-1\right),\frac{(v-k-1)(v+k-6)}{2}\right]$ (7)

В нашем случае $d=2016\leq \frac{\left(v-3\right)\left(v-4\right)}{2}⇒v\geq 67.$ Остаётся перебрать все возможные значения чисел $v$ и $k$ и проверить принадлежность числа 2016 множеству $D\left(v\right)$. Сделаем это, используя компьютер.

Приведём код программы и фрагмент вывода данных после её работы с искомым значением 163:

> **for N from 66 to 164 do if N mod 2 =0 then b1:=N/2+1:else b1:=(N+1)/2+1:fi:y:=0:k:=b1:if (k-4)\*(N-k-1)<=2016 and 2016<=(N-3)\*(N-4)/2 then y:=1:print(вершин,N,вершин\_в\_наибольшей\_грани\_не\_больше,k,нижняя\_оценка,(k-4)\*(N-k-1),верхняя\_оценка,(N-3)\*(N-4)/2 ):fi:for k from b1+1 to N-1 do d1:=(k-4)\*(N-k-1):d2:=(N-k-1)\*(N+k-6)/2:if d1<=2016 and 2016<=d2 then y:=1:fi:if d1<=2016 and 2016<=d2 then print(вершин,N,вершин\_в\_наибольшей\_грани,k,нижняя\_оценка,d1,верхняя\_оценка,d2):fi:od:if y=1 then print(N,yes):else print(N,no):fi:if N=164 then k:=N/2+1: print(вершин,N,вершин\_в\_наибольшей\_грани\_не\_больше,k,нижняя\_оценка,(k-4)\*(N-k-1),верхняя\_оценка,(N-3)\*(N-4)/2 ):for k from N/2+1+1 to N-1 do d1:=(k-4)\*(N-k-1):d2:=(N-k-1)\*(N+k-6)/2:print(вершин,N,вершин\_в\_наибольшей\_грани,k,нижняя\_оценка,d1,верхняя\_оценка,d2): od:fi:od:**



























































































































































































































































































































































































































































































































































































































































































































































































































































































































































































































































































Для каждого значения $v=67,…,163$ программа выводит количество вершин в грани, содержащей наибольшее количество сторон, и границы оценок, содержащих значение 2016.

Для полноты доказательства указаны все диапазоны для $v=164$, естественно, не содержащие значение 2016:





































































































































































Кроме того, найдены все 168 значений $v$ таких, что существует выпуклый многогранник с $ v $ вершинами и 2016 диагоналями:

> **kk:=0:q:={}:r:=2016:for N from 4 to 2030 do if N mod 2 =0 then b1:=N/2+1:else b1:=(N+1)/2+1:fi:y:=0:k:=b1:if (k-4)\*(N-k-1)<=r and r<=(N-3)\*(N-4)/2 then y:=1:fi:for k from b1+1 to N-1 do d1:=(k-4)\*(N-k-1):d2:=(N-k-1)\*(N+k-6)/2:if d1<=r and r<=d2 then y:=1:fi:if d1<=r and r<=d2 then fi:od:if y=1 then q:=q union({N}):kk:=kk+1:fi:od:print(q):nops(q);**





Для каждого $r=1,…,2200$ (граница выбрана произвольно) найдено минимальное значение $v$ такое, что существует выпуклый многогранник с $v$ вершинами и $r$ диагоналями, а выпуклый многогранник с $v+1$ вершинами и $r$ диагоналями не существует. Эти значения занесены в массив $a\left(r\right),r=1..2200$:

> **f:=2020:a:=array(1..f):for r from 1 to f do q:={}:for N from 4 to r+20 do if N mod 2 =0 then b1:=N/2+1:else b1:=(N+1)/2+1:fi:y:=0:k:=b1:if (k-4)\*(N-k-1)<=r and r<=(N-3)\*(N-4)/2 then y:=1:fi:for k from b1+1 to N-1 do d1:=(k-4)\*(N-k-1):d2:=(N-k-1)\*(N+k-6)/2:if d1<=r and r<=d2 then y:=1:fi:od:if y=1 then q:=q union({N}):fi:od:e:={}:for u to nops(q)-1 do if q[u+1]<>q[u]+1 then e:=e union({q[u]}):fi:od:e:=e union({q[nops(q)]}):a[r]:=e[1]:od:print(a):plot(a[i],i=1..f);**



и представлены на графике



Что интересно, зависимость не монотонна, и с учётом зависимости для $d\_{1}(v,k\_{+})$, скорее всего, интерполируется выпуклой вверх степенной функцией.

Рассмотрим некоторые результаты, которые можно перенести на случай выпуклого многогранника $M$ с $v$ вершинами в $R^{N},N\geq 4$

Понятно, что максимальное количество диагоналей реализуется в случае, когда каждая $\left(N-1\right)$ – мерная грань многогранника $M\_{0}$ является симплексом. Тогда каждый отрезок, соединяющий две вершины, и не являющийся ребром, является диагональю.

Подсчитаем количество рёбер многогранника $M\_{0}. $У $\left(N-1\right)$ – мерного симплекса $\frac{N(N-1)}{2}$ ребра, а при добавлении в триангуляцию дополнительной вершины добавляются $N$ рёбер. Так что у многогранника $M\_{0}$ ровно $Nv-\frac{N(N+1)}{2}$ рёбер, а диагоналей $d=\frac{v(v-1)}{2}-\left(Nv-\frac{N\left(N+1\right)}{2}\right)=\frac{(v-N)(v-N-1)}{2}$ .

Рассмотрим $N$ – мерный аналог пирамиды. Пусть при $v\geq N+1$ $ (v-1)$ вершин выпуклого многогранника лежат в $(N-1)$ –мерной гиперплоскости, а ещё одна вершина, ей не принадлежащая, соединена ребром с каждой из остальных вершин. Такой многогранник диагоналей не имеет. В результате получаем оценку для количества диагоналей выпуклого многогранника $M$ с $v$ вершинами в $R^{N},N\geq 4$

$0\leq d\leq \frac{(v-N)(v-N-1)}{2}$ (8)