***Задача 220 (5 баллов)***

***Ответ:*** -искомое значение равно 163;

-для каждого найдено множество значений , которые может принимать количество диагоналей многогранника с вершинами (формула(7));

-найдены все 168 значений таких, что существует выпуклый многогранник с вершинами и 2016 диагоналями;

-для каждого найдено минимальное значение такое, что существует выпуклый многогранник с вершинами и диагоналями, а выпуклый многогранник с вершинами и диагоналями не существует;

-сделаны некоторые обобщения на случае большего числа измерений.

***Решение:*** Обозначим через количество граней, рёбер и вершин многогранника, и пусть упорядоченный набор чисел, где - количество сторон грани:

*.* (1)

Диагонали многогранника это те отрезки, соединяющие вершины многогранника, которые не являются ни рёбрами, ни диагоналями граней. От общего числа отрезков, соединяющих вершины многогранника, отнимаем количество рёбер и общее количество диагоналей всех граней и получаем количество диагоналей

.

А с учётом , получаем

. (2)

Найдем максимальное количество диагоналей многогранника при фиксированном количестве вершин. Для этого нам потребуется исследование некоторой операции перехода от данного многогранника к другому многограннику.

***Операция переламывания грани:*** В грани графа, соответствующего данному многограннику, содержащей сторон, проведем диагональ, разбивающую её на многоугольники, содержащие и сторон, причём . Тогда в образовавшемся графе количество вершин осталось без изменения, а количество диагоналей в соответствующем многограннике увеличивается на величину

(3)

Так что, если в многограннике есть грань, отличная от треугольной, то после её переламывания мы получим новый многогранник с большим количеством диагоналей. Таким образом, максимальное количество диагоналей при фиксированном количестве вершин многогранника достигается в случае, когда соответствующий граф является триангуляцией. В этом случае количество граней определяется однозначно , и потому из формулы (2) определяем количество диагоналей

Понятно, что минимальное количество диагоналей многогранника при фиксированном количестве вершин равно 0 и реализуется для

угольной пирамиды. В результате получаем точную оценку для количества диагоналей выпуклого многогранника с вершинами

(4)

Для дальнейшего нам потребуется уже известная лемма

***Лемма*** Еслитаковы, что , то

.

***Доказательство***

*.*

Из леммы следует, что если в наборе чисел (1) есть пара чисел, отличающихся больше, чем на 1, то увеличив на 1 меньшее из них и уменьшив на 1 большее из них, мы увеличим значение выражения (2). А если для первоначального набора и изменённого набора чисел существуют соответствующие многогранники, то при переходе ко второму многограннику количество его диагоналей увеличится по сравнению с количеством диагоналей исходного многогранника.

Исследуем возможное количество диагоналей выпуклого многогранника при фиксированном количестве вершин , а также при фиксированном количестве сторон грани, содержащей наибольшее количество сторон.

1 случай:

Рассмотрим многогранник , в котором вторая по количеству сторон грань содержит максимальное количество сторон, то есть . Тогда получается, что каждая вершина многогранника принадлежит хотя бы одной из этих двух граней, и пусть количество треугольных граней равно , а количество четырёхугольных граней равно

На рисунке для примера изображён граф для многогранника с .

Набор (1) для такого многогранника удовлетворяет следующему условию:

При фиксированных значениях и второе по величине значение максимально возможное, третье по величине максимально возможное, и т.д. Из леммы следует, таким образом, что для такого многогранника количество диагоналей минимально возможное и равно

Далее, последовательно применяя операцию переламывания четырёхугольных граней (при каждом таком переламывании, как следует из (3), мы увеличиваем количество диагоналей на 1), получаем многогранники с диагоналями в количестве равном Возвращаемся к исходному многограннику и переламываем грань, содержащую вершин с образованием треугольной грани и грани, содержащей вершин. В результате получим многогранник с диагоналями, а далее аналогично предыдущему, последовательно применяя операцию переламывания четырёхугольных граней, получаем многогранники с диагоналями в количестве равном . На следующем шаге возвращаемся к многограннику и переламываем грань, содержащую вершин с образованием треугольной грани и грани, содержащей вершин. В результате получим многогранник с диагоналями, а далее аналогично предыдущему, последовательно применяя операцию переламывания четырёхугольных граней, получаем многогранники с диагоналями в количестве равном . И так далее, действуя аналогично, мы уменьшаем количество сторон во второй по количеству сторон грани, и в результате придём к многограннику, у которой все грани, кроме одной, наибольшей, треугольные. Для такого многогранника количество диагонали равно

*.*

И это максимально возможное количество диагоналей при фиксированных значениях и . Таким образом, всевозможные значения количества диагоналей при фиксированных значениях и заполняют весь диапазон

(5)

2 случай:

В этом случае, как следует из леммы, наименьшее значение количество диагоналей для всех не меньше, чем количество диагоналей многогранника , где

Стартуя с многогранника , применим уже описанную последовательность операций переламывания сначала ко второй по количеству сторон грани, а затем к грани, содержащей наибольшее количество сторон. Заметим, что зазор в количестве диагоналей, появляющийся при переламывании больших граней не превосходит , а количество четырёхугольных граней равно для чётных и для нечётных . И этого хватает, чтобы заполнить все промежуточные значения. В результате мы получим все значения для количества диагоналей в диапазоне

(6)

Объединяя все диапазоны, мы получим множество значений, которые принимает количество диагоналей в выпуклом многограннике с вершинами

Заметим, что при

и отрезки диапазонов (5) для соседних *k* перекрываются, а при

,

и в множестве образуются пустоты. Таким образом, при мы можем указать наибольший отрезок , содержащийся в множестве . Так что

(7)

В нашем случае Остаётся перебрать все возможные значения чисел и и проверить принадлежность числа 2016 множеству . Сделаем это, используя компьютер.

Приведём код программы и фрагмент вывода данных после её работы с искомым значением 163:

> **for N from 66 to 164 do if N mod 2 =0 then b1:=N/2+1:else b1:=(N+1)/2+1:fi:y:=0:k:=b1:if (k-4)\*(N-k-1)<=2016 and 2016<=(N-3)\*(N-4)/2 then y:=1:print(вершин,N,вершин\_в\_наибольшей\_грани\_не\_больше,k,нижняя\_оценка,(k-4)\*(N-k-1),верхняя\_оценка,(N-3)\*(N-4)/2 ):fi:for k from b1+1 to N-1 do d1:=(k-4)\*(N-k-1):d2:=(N-k-1)\*(N+k-6)/2:if d1<=2016 and 2016<=d2 then y:=1:fi:if d1<=2016 and 2016<=d2 then print(вершин,N,вершин\_в\_наибольшей\_грани,k,нижняя\_оценка,d1,верхняя\_оценка,d2):fi:od:if y=1 then print(N,yes):else print(N,no):fi:if N=164 then k:=N/2+1: print(вершин,N,вершин\_в\_наибольшей\_грани\_не\_больше,k,нижняя\_оценка,(k-4)\*(N-k-1),верхняя\_оценка,(N-3)\*(N-4)/2 ):for k from N/2+1+1 to N-1 do d1:=(k-4)\*(N-k-1):d2:=(N-k-1)\*(N+k-6)/2:print(вершин,N,вершин\_в\_наибольшей\_грани,k,нижняя\_оценка,d1,верхняя\_оценка,d2): od:fi:od:**



























































































































































































































































































































































































































































































































































































































































































































































































































































































































































































































































































Для каждого значения программа выводит количество вершин в грани, содержащей наибольшее количество сторон, и границы оценок, содержащих значение 2016.

Для полноты доказательства указаны все диапазоны для , естественно, не содержащие значение 2016:





































































































































































Кроме того, найдены все 168 значений таких, что существует выпуклый многогранник с вершинами и 2016 диагоналями:

> **kk:=0:q:={}:r:=2016:for N from 4 to 2030 do if N mod 2 =0 then b1:=N/2+1:else b1:=(N+1)/2+1:fi:y:=0:k:=b1:if (k-4)\*(N-k-1)<=r and r<=(N-3)\*(N-4)/2 then y:=1:fi:for k from b1+1 to N-1 do d1:=(k-4)\*(N-k-1):d2:=(N-k-1)\*(N+k-6)/2:if d1<=r and r<=d2 then y:=1:fi:if d1<=r and r<=d2 then fi:od:if y=1 then q:=q union({N}):kk:=kk+1:fi:od:print(q):nops(q);**



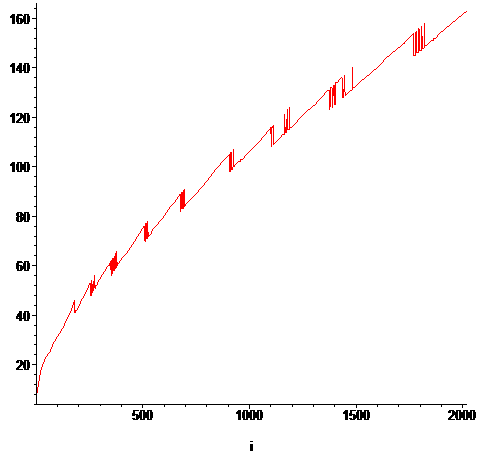


Для каждого (граница выбрана произвольно) найдено минимальное значение такое, что существует выпуклый многогранник с вершинами и диагоналями, а выпуклый многогранник с вершинами и диагоналями не существует. Эти значения занесены в массив :

> **f:=2020:a:=array(1..f):for r from 1 to f do q:={}:for N from 4 to r+20 do if N mod 2 =0 then b1:=N/2+1:else b1:=(N+1)/2+1:fi:y:=0:k:=b1:if (k-4)\*(N-k-1)<=r and r<=(N-3)\*(N-4)/2 then y:=1:fi:for k from b1+1 to N-1 do d1:=(k-4)\*(N-k-1):d2:=(N-k-1)\*(N+k-6)/2:if d1<=r and r<=d2 then y:=1:fi:od:if y=1 then q:=q union({N}):fi:od:e:={}:for u to nops(q)-1 do if q[u+1]<>q[u]+1 then e:=e union({q[u]}):fi:od:e:=e union({q[nops(q)]}):a[r]:=e[1]:od:print(a):plot(a[i],i=1..f);**



и представлены на графике



Что интересно, зависимость не монотонна, и с учётом зависимости для , скорее всего, интерполируется выпуклой вверх степенной функцией.

Рассмотрим некоторые результаты, которые можно перенести на случай выпуклого многогранника с вершинами в

Понятно, что максимальное количество диагоналей реализуется в случае, когда каждая – мерная грань многогранника является симплексом. Тогда каждый отрезок, соединяющий две вершины, и не являющийся ребром, является диагональю.

Подсчитаем количество рёбер многогранника У – мерного симплекса ребра, а при добавлении в триангуляцию дополнительной вершины добавляются рёбер. Так что у многогранника ровно рёбер, а диагоналей .

Рассмотрим – мерный аналог пирамиды. Пусть при вершин выпуклого многогранника лежат в –мерной гиперплоскости, а ещё одна вершина, ей не принадлежащая, соединена ребром с каждой из остальных вершин. Такой многогранник диагоналей не имеет. В результате получаем оценку для количества диагоналей выпуклого многогранника с вершинами в

(8)