***Задача 217 (5 баллов)***

***Ответ:*** 1. Доказано, что если у шестигранника $ABCDA\_{1}B\_{1}C\_{1}D\_{1} $с четырёхугольными гранями пересекаются диагонали $AC\_{1} и BD\_{1} $, то не все остальные пары диагоналей скрещиваются.

2. В общем случае для шестигранника с четырёхугольными гранями найдены все значения количества пар скрещивающихся диагоналей.

***Решение:*** Докажем, что ***диагонали*** $A\_{1}C$ ***и*** $B\_{1}D$ ***пересекаются***.

 У указанного шестигранника $\frac{6∙4}{2}=12$ рёбер, а из формулы Эйлера для выпуклых многогранников следует, что у него $12+2-6=8$ вершин. Из каждой вершины выходит не меньше трёх рёбер, и если бы из какой-то вершины выходило больше трёх рёбер, то всего было бы не меньше $\left⌈\frac{4+3+3+3+3+3+3+3}{2}\right⌉=\left⌈\frac{25}{2}\right⌉=13$ рёбер, что не так. Значит, у шестигранника с четырёхугольными гранями в каждой вершине сходится по три грани, и, следовательно, его каркас изоморфен каркасу куба.

 Обозначим через $α$ плоскость, содержащую грань $ABCD$, через $β$ - плоскость, содержащую грань $CDD\_{1}C\_{1}$, через $γ$ - плоскость, содержащую грань $A\_{1}B\_{1}C\_{1}D\_{1}$, через $δ$ - плоскость, содержащую грань $ABB\_{1}A\_{1}$,

 По условию диагонали $AC\_{1}$ и $BD\_{1} $пересекаются, значит, точки $A,C\_{1},B,D\_{1}$ лежат в одной плоскости. Обозначим эту плоскость через $ε$.

1. Пусть прямые $AB$ и $C\_{1}D\_{1}$ параллельны. Тогда непараллельные

плоскости $α$ и $β$, содержащие, соответственно, прямые $AB$ и $C\_{1}D\_{1}$, пересекаются по прямой, параллельной каждой из прямых $AB$ и $C\_{1}D\_{1}$. Значит, прямая $CD$ параллельна каждой из прямых $AB$ и $C\_{1}D\_{1}$. Аналогично, прямая $A\_{1}B\_{1}$, являющаяся прямой пересечения плоскостей $γ$ и $δ$, также параллельна каждой из прямых $AB$ и $C\_{1}D\_{1}$. Следовательно, прямые $CD и $ $A\_{1}B\_{1}$ параллельны. В плоскости, проходящей через параллельные прямые $CD и $ $A\_{1}B\_{1},$ рассмотрим выпуклый четырёхугольник с вершинами $C,D,A\_{1}B\_{1}$, его сторонами являются рёбра исходного многогранника $CD$ и $A\_{1}B\_{1}$, диагональ $B\_{1}C$ грани $BB\_{1}C\_{1}C$ и диагональ $A\_{1}D$ грани $AA\_{1}D\_{1}D$, а диагоналями – отрезки $A\_{1}C$ и $B\_{1}D$, которые понятно, пересекаются.

1. Пусть прямые $AB$ и $C\_{1}D\_{1}$ не параллельны.

Далее, предположим, что прямая $CD$ параллельна прямой $AB$. Тогда прямая $CD$ параллельна плоскости $ε$, и, поскольку, плоскость $β, $ содержащая прямую $CD$, пересекает плоскость $ε$ по прямой $C\_{1}D\_{1}$, то прямая $CD$ параллельна прямой $C\_{1}D\_{1}.$ Таким образом, прямые $AB$ и $C\_{1}D\_{1}$ параллельны – противоречие с предположением этого пункта.

 Так что, прямая $CD$ не параллельна прямой $AB$ и, аналогично, прямая $CD$ не параллельна прямой $C\_{1}D\_{1}$. Пусть прямая $CD$ пересекается с прямой $AB$ в точке $T. $Понятно, что точка $T$ является точкой пересечения прямой $CD и плоскости ε$. А, поскольку, точка $T\_{1}$ пересечения прямой $CD$ и прямой $C\_{1}D\_{1}$ тоже лежит в плоскости $ε$ и также является точкой пересечения прямой $CD и плоскости ε$, то точки $T$ и $T\_{1}$ совпадают. Таким образом, доказано, что прямая $CD$ проходит через точку $T$ пересечения прямых $AB $ и $C\_{1}D\_{1}$.

 Аналогично получаем, что прямая $A\_{1}B\_{1}$ также проходит через точку $T$ пересечения прямых $AB $ и $C\_{1}D\_{1}$. И в результате доказано, что прямые $CD$ и $A\_{1}B\_{1}$ пересекаются, а, значит, лежат в одной плоскости. Далее так же, как и в п.1) в плоскости, содержащей прямые $CD и $ $A\_{1}B\_{1},$ рассмотрим выпуклый четырёхугольник с вершинами $C,D,A\_{1}B\_{1}$. Его сторонами являются рёбра исходного многогранника $CD$ и $A\_{1}B\_{1}$, диагональ $B\_{1}C$ грани $BB\_{1}C\_{1}C$ и диагональ $A\_{1}D$ грани $AA\_{1}D\_{1}D$, а диагоналями – отрезки $A\_{1}C$ и $B\_{1}D$, которые понятно, пересекаются.

 Основное утверждение доказано.

 Понятно, что и обратное утверждение верно: если диагонали $A\_{1}C$ и$B\_{1}D$ пересекаются, то и диагонали $AC\_{1} и BD\_{1} $также пересекаются (для доказательства достаточно переобозначить вершины).

 Таким образом, диагонали $A\_{1}C$ и$B\_{1}D$ пересекаются тогда и только тогда, когда пересекаются диагонали $AC\_{1} и BD\_{1}. $

 То же верно и для других вариантов двух пар диагоналей. Таким образом, все шесть пар диагоналей разбиваются на три пары по две пары таким образом, что как только в одной паре по две диагонали какие-то две диагонали пересекается, то и другие две диагонали из этой пары также пересекаются.

 Так что, общее количество пар пересекающихся диагоналей чётно. Ну, и

 общее количество пар скрещивающихся диагоналей чётно.

 Рассмотрим варианты получения многогранников с различными чётными количествами пар скрещивающихся диагоналей.

***0 пар:*** у куба все диагонали пересекаются в одной точке, значит, скрещивающихся диагоналей нет.

***2 пары:***  у прямой призмы с основанием – равнобокой трапецией ровно 4 пары пересекающихся диагоналей, значит, ровно 2 пары скрещивающихся диагоналей.

***4 пары:*** пусть у куба $ABCKLB\_{1}C\_{1}D\_{1}$ точка $D$ - середина ребра $CK$, а точка $A\_{1}$

выбрана на продолжении ребра $B\_{1}L$ за точку $L $так, что $A\_{1}L:LB\_{1}=1:2$. Тогда в шестиграннике $ABCDA\_{1}B\_{1}C\_{1}D\_{1}$ пересекаются только лишь пара диагоналей $A\_{1}C$и$B\_{1}D$, и пара диагоналей $AC\_{1} и B.$ Значит, всего ровно 4 пары скрещивающихся диагоналей.

***6 пар:*** понятно, что для шестигранника в общем положении каждая пара “противоположных” рёбер ($AB $ и $C\_{1}D\_{1}, $ $CD и $ $A\_{1}B\_{1}, $ $BC и A\_{1}D\_{1}$, $AD$ и $B\_{1}C\_{1},$ $AA\_{1} и CC\_{1}$ , $BB\_{1} и DD\_{1}$) не лежит в одной плоскости, если это оказалась не так, то достаточно немного пошевелить каркас. В этом случае никакие две диагонали не пересекаются, значит, имеем 6 пар скрещивающихся диагоналей.