О. Б. Полубасов   24.07.2015 г.

===========ММ202===============

ММ202 (5 баллов)

Решения принимаются до 18.09.2015

При каких значениях параметра a разрешимо уравнение $x^2 - a = \lfloor x \rfloor \{x\}$?

Проанализируем функцию $a(x) = x^2 - [x]\{x\}$.

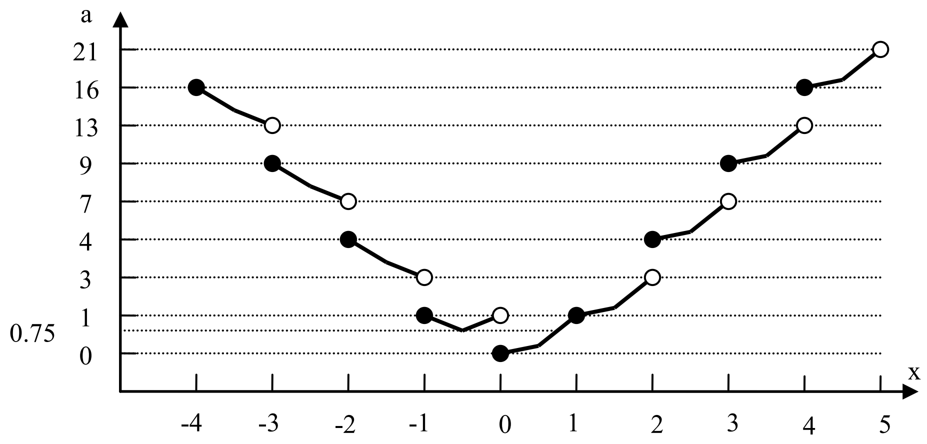

Рис. 1. График функции $a(x) = x^2 - [x]\{x\}$.

На интервалах между целыми x функция дифференцируема:

$\frac{da}{dx} = 2x - [x] = x + \{x\}$

$= 0$ при $x = -0.5$;

> 0 при $x > -0.5$;

< 0 при $x < -0.5$.

Заметим, что $a = x^2 - [x]\{x\} = x^2 - [x](x - [x]) = x^2 + [x]^2 - x[x]$.

Если $k < x < k+1$, где k – натуральное, то $a = x^2 + k^2 - kx$.

Подставляя в формулу предельные значения для x на рассматриваемом интервале и пользуясь тем, что на этом интервале функция монотонно возрастает, получаем: $k^2 < a < k^2 + k + 1$.

Если $-(k+1) < x < -k$, где k – натуральное, то $a = x^2 + (k+1)^2 + (k+1)x$.

Подставляя в формулу предельные значения для x на рассматриваемом интервале и пользуясь тем, что на этом интервале функция монотонно убывает, получаем: $k^2 + k + 1 < a < (k + 1)^2$.

Итак, функция a(x) кусочно-параболическая, имеет разрыв в каждой целочисленной точке, кроме 1, имеет локальный минимум (экстремум) в точке $x = -0.5$ и глобальный минимум (не являющийся экстремумом) в точке $x = 0$. Область определения функции – вся числовая прямая. Множество принимаемых значений: $a \geq 0$, $a \neq k^2 + k + 1$, где k – натуральное.

По результатам анализа составим таблицу (k – натуральное число).

Интервал	Число решений	Решения
$a < 0$	0	-
$0 \le a < 0.75$	1	$x = \sqrt{a}$
$a = 0.75$	2	$x = -0.5$ $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$0.75 < a < 1$	3	$x = \frac{-1 \pm \sqrt{4a-3}}{2}$ $x = \sqrt{a}$
$a = k^2$	2	$x = \pm k$
$k^2 < a < k^2 + k + 1$	1	$x = \frac{k + \sqrt{4a - 3k^2}}{2}$
$a = k^2 + k + 1$	0	-
$k^2 + k + 1 < a < (k+1)^2$	1	$x = \frac{-(k+1) - \sqrt{4a - 3(k+1)^2}}{2}$

Таб. 1. Разрешимость уравнения $x^2 - a = [x]\{x\}$ в зависимости от параметра a.

Ответ. Уравнение разрешимо при всех $a \ge 0$, $a \ne k^2 + k + 1$, где k – натуральное.