

ММ199.

Сколькокими внутренними диагоналями и на сколько треугольников триангулируется n -угольник рода m ?

Решение.

Рассмотрим чертёж n -угольника с проведённой триангуляцией. Это планарный граф, следовательно для него выполняется формула Эйлера:

$$V - E + F = 2$$

Где V - количество вершин, E - число рёбер, F - граней (включая внешнюю).

Для нашего случая:

n - число вершин,

m - кол-во многоугольных “дыр”,

t - кол-во треугольников в триангуляции,

l - число внутренних диагоналей при триангуляции.

Тогда $V = n$.

Находим E , в это число входят внутренние диагонали, проведённые при триангуляции и все рёбра n -угольника. В нашем случае имеем ровно n рёбер, т.к. в каждой из вершин ровно по 2 ребра, а каждое ребро связывает 2 вершины. Тогда $E = n + l$.

В число граней входят треугольники, “дыры” и одна внешняя грань, т.е. $F = t + m + 1$.

Тогда

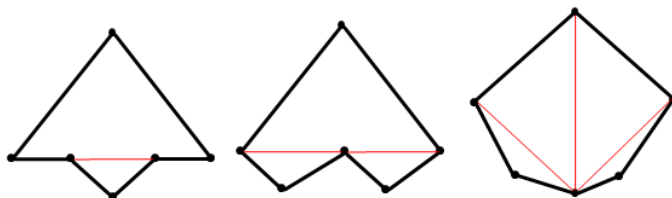
$$n - (n + l) + t + m + 1 = 2$$

или $l - t = m - 1$ или $l = t + m - 1$.

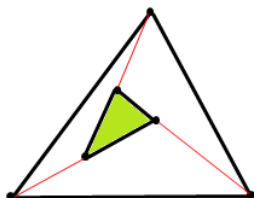
n -угольник разбивается на t треугольников, в них всего $3t$ сторон. Эти стороны составлены из рёбер n -угольника и диагоналей разбиения. Причём каждая внутренняя диагональ является стороной сразу в двух треугольниках, тогда $3t = n + 2l$ или $l = (3t - n) / 2$.

Получаем $t + m - 1 = (3t - n) / 2$ или $t = n + 2m - 2$. Тогда $l = n + 3m - 3$. с

Можно отметить, что в некоторых частных случаях могут быть и иные значения. Например, 6-угольник рода 0 может триангулироваться 1, 2 или 3 диагоналями:



А вот 6-угольник 1-ого рода с 3 диагоналями и 3 треугольниками (вместо расчётных 6):



Но если никакие 3 вершины n -угольника не лежат на одной прямой, то количество внутренних диагоналей при триангуляции равно $n + 3t - 3$, а количество треугольников - $n + 2t - 2$.

В любом случае это максимально возможные значения.