Яковлева О.Н., преподаватель,
Пермский институт железнодорожного транспорта

ГИПОТЕЗА БИЛА. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Аннотация: представлено доказательство наличия общих делителей чисел A, B, C если $A^x+B^y=C^z$, где A, B, C, x, y, z – натуральные числа, x,y,z >2.

В ходе доказательства выполнено преобразование исходного уравнения в уравнение третьей степени, в котором переменными являются простые делители чисел A, B, C.

Ключевые слова: натуральные решения, простые делители, формула Евклида

1. Введение.

Гипотеза Била – гипотеза в теории чисел, обобщение великой теоремы Ферма, предложена техасским математиком – любителем Эндрю Билом и формулируется следующим образом:

Если $A^x+B^y=C^z$, где A ,B, C, x, y, z – натуральные числа, $x,y,z >2$, то A,B,C имеют общий простой делитель [3].

При условии справедливости гипотезы великую теорему Ферма можно доказать от противного.

Пусть существуют натуральные числа $n>2$ и A,B,C такие, что $A^n+B^n=C^n$, причем C – максимально возможное, тогда гипотеза Била влечет, что существует простое число p, делящее каждое из чисел A,B,C.

Но тогда $(A/p)^n+(B/p)^n=(C/p)^n$, что противоречит минимальности выбора C.

Полученное противоречие означает, что требуемых натуральных чисел не существует, то есть великая теорема Ферма доказана.

2. Постановка задачи.

Целью данной работы является доказать, что гипотеза верна.

Представим числа A,B,C в виде:

$$A=ta,\ B=ub,\ C=vc,$$

где a,b,c – простые делители, следовательно, $A^x=t^xa^x$, $B^y=u^yb^y$, $C^z=v^zc^z$, тогда исходное уравнение можно записать как

$$t^xa^x+u^yb^y=v^zc^z \qquad (1)$$

Если гипотеза верна, то уравнение (1) относительно переменных a,b,c будет иметь только одно натуральное решение: $a=b=c$.

В исходном уравнении $A^x+B^y=C^z$ два числа нечетных и одно четное. Представим уравнение таким образом, чтобы в левой его части была разность нечетных чисел.

Например:

$$3^3+6^3=3^5$$

$$C^z-A^x=B^y \qquad (2)$$

$$31^5+31^6=62^5$$

$$B^y-A^x=C^z-2A^x \qquad (3)$$

В случае, когда нечетными являются одно из слагаемых и их сумма уравнение (2) представим

$$(C^z-A^x)=B^y$$

$$(v^zc^z-t^xa^x)=u^yb^y \qquad (4)$$

Целое (натуральное) число $(v^zc^z-t^xa^x)$ представим по формуле остатков от деления целого числа на данное натуральное (c^3-a^3) [1].

$(v^zc^z-t^xa^x)=q(c^3-a^3)+r$, *где* q,r – *натуральные,* $r<(c^3-a^3)$, $q=1$, $r=0$, *если* $A=a$, $C=c$, $z=3$, $x=3$, таким образом, обозначено условие, что $x,z,y>2$.

Уравнение (4) примет вид:

$$q(c^3-a^3)+r=u^yb^y$$

$$q(c^3-a^3)=u^yb^y-r=qp(c-a) \qquad (5)$$

где $p=c^2+ac+a^2$

так как q-натуральное число, то уравнение

$$(c^3-a^3)=p(c-a) \qquad (6)$$

будет равносильно уравнению (5).

Из уравнения (6) получим

$$(c-a)^3+3ca(c-a)-p(c-a)=0 \qquad (7)$$

$$(c-a)((c-a)^2+3ca-p)=0 \qquad (8)$$

Произведение двух сомножителей равное нулю, означает:

$$(c-a)=0 \qquad (9)$$

$$(c-a)^2+3ca-p=0 \qquad (10)$$

общие натуральные решения уравнений (9) и (10) будут являться решением уравнения (6).

Уравнение (9) имеет одно натуральное решение: $c=a$.

Чтобы выяснить, какие натуральные решения имеет уравнение (10), выполним следующие действия:

1. Составим уравнение, равносильное уравнению (10)

$$(c+a)^2-ac-p=0 \qquad (11)$$

2. Вычтем из уравнения (11) равносильное уравнение (10), получим:

$$(c+a)^2-(c-a)^2=4ac \qquad (12)$$

3. Возведем в квадрат обе части уравнения (12), получим:

$$((c+a)^2-(c-a)^2)^2=16a^2c^2 \qquad (13)$$

$$(c+a)^4+(c-a)^4=2(c^2-a^2)^2+16a^2c^2 \qquad (14)$$

4. Перенесем в левую часть уравнения (14) $8a^2c^2$, получим:

$$((c+a)^4-4a^2c^2)+((c-a)^4-4a^2c^2)=2(c^2-a^2)^2+8a^2c^2 \qquad (15)$$

5. Выражения в скобках в левой части уравнения (15) представляют разность квадратов двух чисел. Разложив их на множители и проведя простые преобразования, получим:

$$(c^2+a^2)(c^2+4ac+a^2)+(c^2-4ac+a^2)(c^2+a^2)= \\ =2(c^2-a^2)^2+8a^2c^2 \quad (16)$$

$$(c^2+a^2)(2c^2+2a^2)=2(c^2-a^2)^2+8a^2c^2 \quad (17)$$

6. Разделим на 2 все члены уравнения, получим:

$$(c^2+a^2)^2-4a^2c^2=(c^2-a^2)^2 \quad (18)$$

$$(c^2+a^2)^2 - (2ca)^2=(c^2-a^2)^2 \quad (19)$$

Или

$$k^2+l^2=m^2 \quad (20)$$

где

$$k=c^2-a^2,\ l=2ac,\ m=c^2+a^2$$

В соответствии с формулой Евклида, которая однозначно генерирует натуральные решения уравнения (20), это уравнение не имеет натуральных решений при *a#c,так как* числа *a* и *c* – простые делители нечетных чисел, следовательно, их разность всегда четна [2].

Это означает, что уравнение (19) имеет только одно натуральное решение при простых нечетных *a* и *c,* уравнение (9) и (10) имеют одно общее натуральное решение: *a=c*, что является решением уравнения (6), а уравнение (4) будет иметь натуральные решения только при *a=c.*

В случае, когда нечетными являются оба слагаемые, уравнение (3) представим как

$$(u^yb^y-t^xa^x)=v^zc^z-2t^xa^x \quad (21)$$

Далее, рассуждая так же, как и в случае, когда нечетными являются одно из слагаемых и их сумма, приходим к выводу, что уравнение (21) будет иметь натуральные решения только при *a=b.*

Таким образом, простые делители нечетных чисел равны, а это означает, что и четные числа имеют тот же простой делитель, а уравнение (1) имеет одно натуральное решение: *a=b=c.*

3. Заключение.

Исходное уравнение $A^x+B^y=C^z$, представленное в виде $t^xa^x+u^yb^y=v^zc^z$, имеет только одно натуральное решение относительно переменных *a, b, c,* где a, b, c – простые делители чисел *A, B, C*: *a=b=c.*

Таким образом, доказано:

если

$$A^x+B^y=C^z$$

где *A, B, C, x, y, z* – натуральные числа*, x, y, z >2*, то *A,B,C* имеют общий простой делитель.

Вывод. Гипотеза верна.

Литература

1. Дорофеев Г.В. и др. Математика. 8кл. М., и-д «Дрофа», М.,1999, с. 59.
2. Серпинский В.Н. Пифагоровы треугольники. М., Учпедгиз,1959, с. 111.
3. http://www.bealconjecture.com/

Referenses

1. Dorofeev G.V. i dr. Matematika. 8kl. M., i-d «Drofa», M.,1999, s. 59.
2. Serpinskij V.N. Pifagorovy treugol'niki. M., Uchpedgiz,1959, s. 111.
3. http://www.bealconjecture.com/

Yakovleva O.N., Lecturer,
Perm Institute of Railway Transport

BEAL HYPOTHESIS EVIDENCE

Abstract: the evidence of common divisors of the numbers A, B, C if $A^x+B^y=C^z$ where A, B, C, x, y, z – natural numbers, x, y, z> 2 is submitted.

It is made the proof of the original equation in a conversion equation of the third degree, in which the prime factors of numbers are the variables A, B, C.

Keywords: natural solutions, prime divisors, Euclid's formula