

Вектором граней выпуклого многогранника P назовем набор $[f_3, f_4, \dots, f_s]$,

где f_i – количество i - угольных граней P , а s - наибольшее число сторон грани.

Будем говорить, что P относится к классу m , если $\max(f_i) = m$.

ММ280

Каждой твари по ... тройке

Какие векторы граней может иметь выпуклый многогранник, если в этих векторах нет чисел, отличных от 3 и 0?

Ответ: Для выпуклых многогранников, существует ровно 6 векторов граней, в которых нету чисел отличных от 3 и 0.

И эти вектора:

1. $(F_3=F_4=F_5=3 \mid i \notin \{3,4,5\} \rightarrow F_i=0)$;
2. $(F_3=F_5=F_6=3 \mid i \notin \{3,5,6\} \rightarrow F_i=0)$;
3. $(F_3=F_4=F_5=F_6=3 \mid i \notin \{3,4,5,6\} \rightarrow F_i=0)$;
4. $(F_3=F_4=F_6=F_7=3 \mid i \notin \{3,4,6,7\} \rightarrow F_i=0)$;
5. $(F_3=F_4=F_5=F_8=3 \mid i \notin \{3,4,5,8\} \rightarrow F_i=0)$;
6. $(F_3=F_4=F_5=F_6=F_8=3 \mid i \notin \{3,4,5,6,8\} \rightarrow F_i=0)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Для каждого вектора по отдельности, множество всех « i » для которых $f_i=3$ обозначим как $\{i\}$

И запишем трёх очевидных ограничения для выпуклых многогранников, в векторах которых нету чисел отличных от 0 и 3

- 1) $\{(2e-3v) \geq 0 \mid e = \sum_{i \in \{i\}} (3i/2); v = 2 + \sum_{i \in \{i\}} \{\frac{3(i-2)}{2}\}; (i-2) \in \mathbb{N}\} \rightarrow \{(i-2) \in \mathbb{N}; 0 \leq (4e-6v)/3 = \sum_{i \in \{i\}} \{2i\} - [4 + \sum_{i \in \{i\}} \{3(i-2)\}] = -4 + \sum_{i \in \{i\}} (6-i)\}$
Получили первое ограничение $\rightarrow \{(i-2) \in \mathbb{N}; \sum_{i \in \{i\}} (6-i) \geq 4\}$
- 2) $\{e = \sum_{i \in \{i\}} \{\frac{3i}{2}\} \mid e \in \mathbb{N}\} \rightarrow$ Второе ограничение: $\sum_{i \in \{i\}} \{i\} = 0 \pmod{2}$
- 3) $3 * \max(i) \leq v + 6 = 6 + 2 + \sum_{i \in \{i\}} \{\frac{3(i-2)}{2}\} \rightarrow$ Третье ограничение: $\max(i) \leq 8/3 + \sum_{i \in \{i\}} \{\frac{i-2}{2}\}$

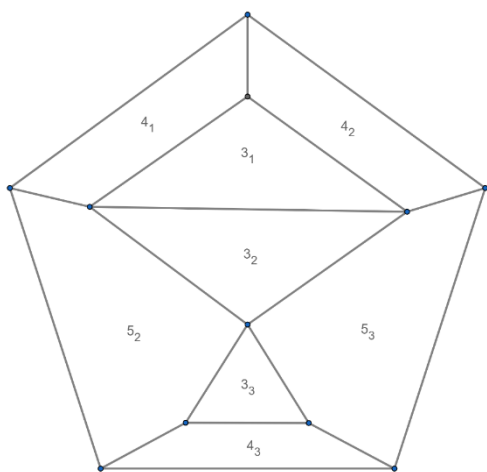
Из-за первых двух ограничений, отпадают все множества $\{i\}$ кроме: (3,5); (3,5,6); (3,4,5); (3,4,5,6); (3,4,7); (3,4,6,7); (3,4,5,8); (3,4,5,6,8)

Из-за третьего ограничения отпадают ещё (3,5) и (3,4,7)

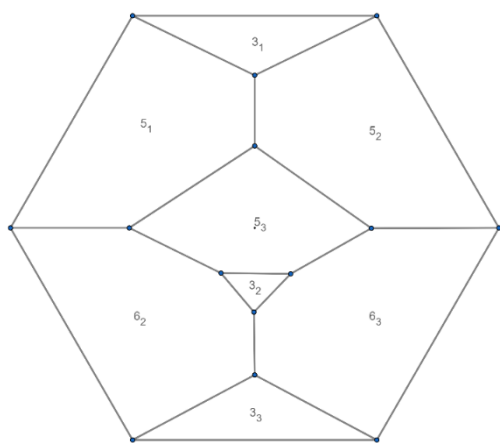
Остаются только множества: (3,4,5); (3,5,6); (3,4,5,6); (3,4,6,7); (3,4,5,8); (3,4,5,6,8)

А теперь продемонстрируем всех выпуклых многогранников, в векторах граней которых нету чисел кроме 0 и 3.

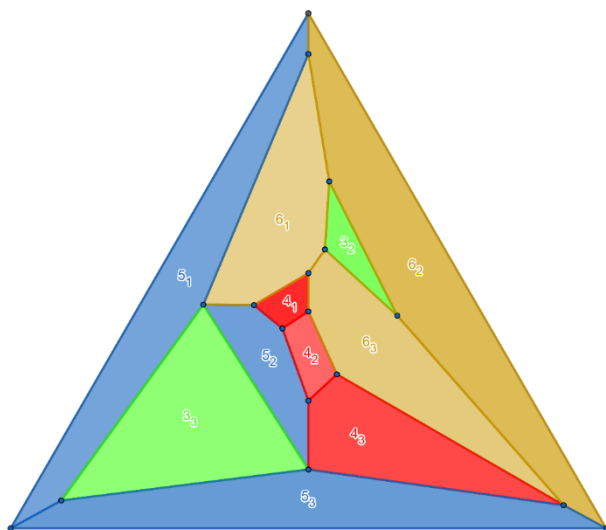
1) $F_3=F_4=F_5=3$



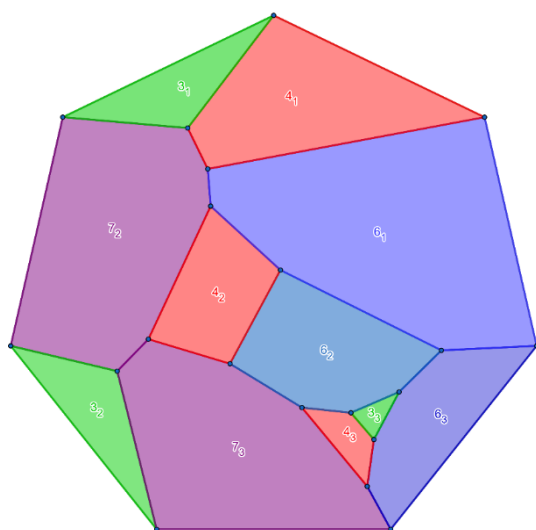
2) $F_3=F_5=F_6=3$



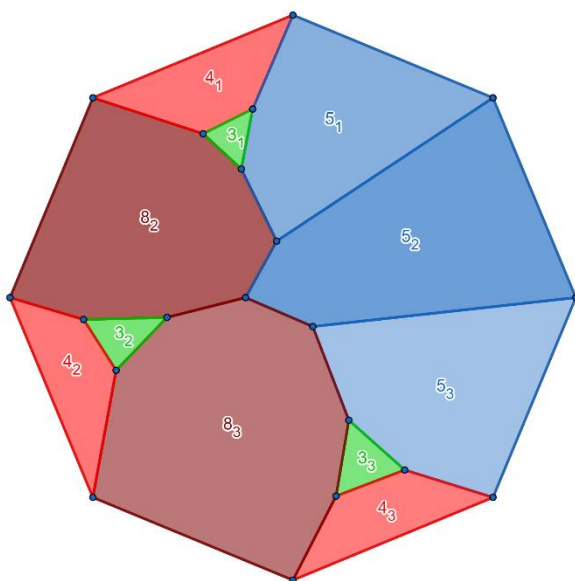
3) $F_3=F_4=F_5=F_6=3$



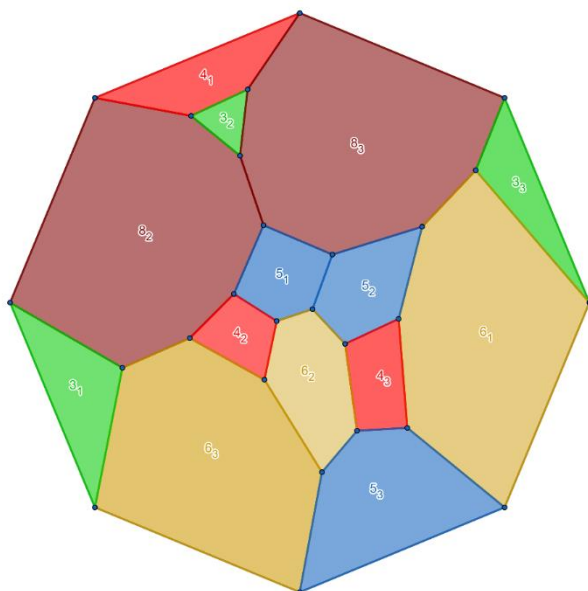
4) $F_3=F_4=F_6=F_7=3$



5) $F_3=F_4=F_5=F_8=3$



6) $F_3=F_4=F_5=F_6=F_8=3$



И этим заканчивается доказательство того, что векторов выпуклых многогранников, в которых нет чисел отличных от 3 и 0, существует ровно 6, и им соответствующие множества $\{i\}$:

- 1) (3,4,5); 2) (3,5,6); 3) (3,4,5,6); 4) (3,4,6,7); 5) (3,4,5,8); 6) (3,4,5,6,8)