Уравнения Пелля и задачи, к ним сводящиеся

Н. Н. Осипов
e-mail: nnosipov@rambler.ru

В этой статье *уравнениями Пелля* мы будем называть уравнения вида

$$x^2 - Ay^2 = B, \tag{1}$$

где $A > 0$, $B \neq 0$ — некоторые целые числа, при этом $\sqrt{A}$ является иррациональным числом. Вообще говоря, в классическом понимании уравнение Пелля — это уравнение (1) при $B = 1$:

$$x^2 - Ay^2 = 1. \tag{2}$$

Решая уравнение Пелля (1) в целых числах, удобно под решением подразумевать не только некоторую пару (x, y) целых чисел, удовлетворяющих уравнению, но и одно вещественное число

$$x + y\sqrt{A}$$

(очевидно, такое соотвествие будет взаимно однозначным из-за иррациональности $\sqrt{A}$).

Теория уравнений Пелля базируется на следующей фундаментальной связи между уравнением (1) и *ассоциированным* с ним (т. е. с тем же A) уравнением (2): если $x + y\sqrt{A}$ — некоторое решение уравнения (1), $u + v\sqrt{A}$ — одно из решений уравнения (2), то их произведение

$$(x + y\sqrt{A})(u + v\sqrt{A}) = (xu + Ayv) + (xv + yu)\sqrt{A} = X + Y\sqrt{A}$$

будет ещё одним решением уравнения (1).

Другой фундаментальный факт теории относится к классическим уравнениям Пелля (2): все они *нетривиально* разрешимы, т. е. имеют решения, отличное от ± 1. В частности, существует *минимальное* (с наименьшими натуральными x_0 и y_0) решение

$$\varepsilon = x_0 + y_0\sqrt{A} > 1$$

этого уравнения.

Приступая к исследованию уравнения (1), сначала ответим на вопрос, как устроено множество всех решений уравнения (2) в целых числах. Ответ таков: все решения даются формулой

$$x + y\sqrt{A} = \pm\varepsilon^k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Отметим также, что все решения в неотрицательных целых числах получаются, если в формуле выбрать знак «плюс» и считать $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Действительно, рассмотрим произвольное решение уравнения (2), удовлетворяющее дополнительному условию положительности:

$$x + y\sqrt{A} > 0.$$

Очевидно, существует единственное $k \in \mathbb{Z}$, для которого

$$\varepsilon^k \leqslant x + y\sqrt{A} < \varepsilon^{k+1}.$$

На самом деле $x + y\sqrt{A} = \varepsilon^k$, так как в противном случае решение

$$X + Y\sqrt{A} = \frac{x + y\sqrt{A}}{\varepsilon^k} = \frac{x + y\sqrt{A}}{(x_0 + y_0\sqrt{A})^k} = (x + y\sqrt{A})(x_0 - y_0\sqrt{A})^k$$

уравнения (2) удовлетворяло бы неравенствам

$$1 < X + Y\sqrt{A} < \varepsilon,$$

имея при этом натуральные компоненты:

$$X = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) > 0, \quad Y = \frac{1}{2\sqrt{A}}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) > 0,$$

где $\alpha = X + Y\sqrt{A}$.

Пусть $\alpha = X + Y\sqrt{A} > 0$ — произвольное решение уравнения (1). Справедливо следующее утверждение: одновременно $X > 0$ и $Y > 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha > \sqrt{|B|}$. В этом утверждении строгие неравенства можно всюду заменить нестрогими.

Вернёмся к нашему основному вопросу — о структуре множества решений общего уравнения Пелля (1), которое в отличие от классического уравнения Пелля (2) уже может оказаться неразрешимым в целых числах.

Воспользуемся прежней идеей и разделим произвольное положительное решение уравнения (1) на подходящую степень ε. Итак, пусть

$$\varepsilon^k \leqslant x + y\sqrt{A} < \varepsilon^{k+1}$$

для некоторого $k \in \mathbb{Z}$. Делением на ε^k получим решение $X + Y\sqrt{A}$ уравнения (1), для которого

$$1 \leqslant X + Y\sqrt{A} < \varepsilon. \tag{3}$$

Покажем, что таких решений существует не более чем конечное (быть может, пустое) множество. Действительно, поскольку

$$Y = \frac{1}{2\sqrt{A}}\left(X + Y\sqrt{A} - \frac{B}{X + Y\sqrt{A}}\right),$$

видно, что Y принадлежит $\mathcal{I}(f, [1; \varepsilon))$ — интервалу значений функции

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{A}}\left(\alpha - \frac{B}{\alpha}\right) \tag{4}$$

при $\alpha \in [1; \varepsilon)$. Ввиду ограниченности $\mathcal{I}(f, [1; \varepsilon))$ содержит лишь конечное множество целых чисел — кандидатов на роль Y. Каждому такому целому числу Y соответствует не более двух целых чисел X вида $\pm\sqrt{AY^2 + B}$. Значит, число искомых решений $X + Y\sqrt{A}$ конечно.

Пример 1. Пусть $A = 11$ и $B = -95$. Можно проверить, что в этом случае

$$\varepsilon = 10 + 3\sqrt{11} \approx 19{,}94, \quad \mathcal{I}(f, [1; \varepsilon)) = \left[\frac{\sqrt{95}}{\sqrt{11}}; \frac{48}{\sqrt{11}}\right] \approx [2{,}93; 14{,}47].$$

Значит, $Y \in \{3, 4, \ldots, 14\}$. Из условия $\sqrt{11Y^2 - 95} \in \mathbb{Z}$ следует, что $Y \in \{3, 4, 13\}$. Итак,

$$X + Y\sqrt{11} \in \{\pm 2 + 3\sqrt{11}, \pm 9 + 4\sqrt{11}, \pm 42 + 13\sqrt{11}\}.$$

Однако не все найденные решения действительно удовлетворяют условию

$$1 \leqslant X + Y\sqrt{11} < \varepsilon.$$

Проверка показывает, что лишними здесь будут $9 + 4\sqrt{11}$ и $42 + 13\sqrt{11}$. □

Пусть теперь $X_j + Y_j\sqrt{A}$ — все решения уравнения (1), удовлетворяющие условию (3). Будем называть их *базисными* решениями. Произвольное решение уравнения (1) в целых числах может быть получено по одной из формул

$$x + y\sqrt{A} = \pm(X_j + Y_j\sqrt{A})\varepsilon^k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ясно, что это правило останется в силе, если условие базисности (3) изменить следующим образом:

$$q \leqslant X + Y\sqrt{A} < q\varepsilon, \tag{5}$$

где $q > 0$ — некоторый фиксированный *масштабный множитель*. Его можно выбирать, исходя из различных соображений. Значение $q = 1$ соответствует стандартному подходу (см., например, [1]), но, как будет видно из дальнейшего, это не самый удачный выбор.

Первое, что хотелось бы сделать — это подобрать q так, чтобы интервал значений $\mathcal{I}(f, [q; q\varepsilon))$ функции (4) при $\alpha \in [q; q\varepsilon)$ был наименьшим по длине.

Теорема 1. *Эта задача имеет единственное решение*

$$q = \sqrt{\frac{|B|}{\varepsilon}}. \tag{6}$$

При таком выборе масштабного множителя базисные решения определяются следующими условиями:

$$\frac{\sqrt{B}}{2\sqrt{A}}\,(\varepsilon^{-1/2} - \varepsilon^{1/2}) \leqslant Y < \frac{\sqrt{B}}{2\sqrt{A}}\,(\varepsilon^{1/2} - \varepsilon^{-1/2}), \quad X = \sqrt{AY^2 + B}$$

в случае $B > 0$*; если же* $B < 0$*, то*

$$\frac{\sqrt{|B|}}{\sqrt{A}} \leqslant Y < \frac{\sqrt{|B|}}{2\sqrt{A}}\,(\varepsilon^{1/2} + \varepsilon^{-1/2}), \quad X = \pm\sqrt{AY^2 + B},$$

а также

$$Y = \frac{\sqrt{|B|}}{2\sqrt{A}}\,(\varepsilon^{1/2} + \varepsilon^{-1/2}), \quad X = -\sqrt{AY^2 + B}.$$

Доказательство. Для каждого $q > 0$ вычислим интервал

$$\mathcal{I}(q) = \mathcal{I}(f, [q; q\varepsilon)),$$

найдём его длину $L(q)$ и минимизируем её. Имеем

$$f'(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{A}}\left(1 + \frac{B}{\alpha^2}\right),$$

поэтому в случае $B > 0$ функция $f(\alpha)$ возрастает при $\alpha > 0$, а в случае $B < 0$ она убывает при $0 < \alpha < \sqrt{|B|}$ и возрастает при $\alpha > \sqrt{|B|}$.

I. Пусть $B > 0$. В этом случае

$$\mathcal{I}(q) = [f(q); f(q\varepsilon)), \quad L(q) = \frac{\varepsilon - 1}{2\sqrt{A}}\left(q + \frac{B}{\varepsilon q}\right).$$

Легко видеть, что минимум $L(q)$ достигается при

$$q = \sqrt{\frac{B}{\varepsilon}}.$$

При таком значении q имеем

$$\mathcal{I}(q) = \left[\frac{\sqrt{B}}{2\sqrt{A}}\,(\varepsilon^{-1/2} - \varepsilon^{1/2}); \frac{\sqrt{B}}{2\sqrt{A}}\,(\varepsilon^{1/2} - \varepsilon^{-1/2})\right).$$

Кроме того, для каждого значения $Y \in \mathcal{I}(q)$ существует единственное значение $\alpha \in [q; q\varepsilon)$, для которого $Y = f(\alpha)$, при этом

$$X = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{B}{\alpha}\right) = \sqrt{AY^2 + B}.$$

II. Пусть теперь $B < 0$. Здесь необходимо учитывать различное расположение интервала $[q; q\varepsilon)$ по отношению к точке $\alpha = \sqrt{|B|}$.

Если $0 < q < \varepsilon q \leqslant \sqrt{|B|}$, т. е. $0 < q \leqslant \varepsilon^{-1}\sqrt{|B|}$, то

$$\mathcal{I}(q) = (f(\varepsilon q; f(q)], \quad L(q) = L_1(q) = \frac{1-\varepsilon}{2\sqrt{A}}\left(q + \frac{B}{\varepsilon q}\right).$$

Если $\sqrt{|B|} \leqslant q < \varepsilon q$, т. е. $q \geqslant \sqrt{|B|}$, то

$$\mathcal{I}(q) = [f(q); f(\varepsilon q)), \quad L(q) = L_2(q) = \frac{\varepsilon - 1}{2\sqrt{A}}\left(q + \frac{B}{\varepsilon q}\right).$$

Наконец, если $q < \sqrt{|B|} < q\varepsilon$, т. е. $\varepsilon^{-1}\sqrt{|B|} < q < \sqrt{|B|}$, то

$$L(q) = L_3(q) = \max\{f(q), f(q\varepsilon)\} - f(\sqrt{|B|}).$$

Нетрудно проверить, что условие $f(q) \lesseqqgtr f(q\varepsilon)$ равносильно условию

$$q \lesseqqgtr \sqrt{\frac{|B|}{\varepsilon}}.$$

Следовательно, если $\varepsilon^{-1}\sqrt{|B|} < q < \varepsilon^{-1/2}\sqrt{|B|}$, то

$$L_3(q) = \frac{1}{2\sqrt{A}}\left(\varepsilon q - \frac{B}{\varepsilon q}\right) - \frac{\sqrt{|B|}}{\sqrt{A}},$$

а если $\varepsilon^{-1/2}\sqrt{|B|} \leqslant q < \sqrt{|B|}$, то

$$L_3(q) = \frac{1}{2\sqrt{A}}\left(q - \frac{B}{q}\right) - \frac{\sqrt{|B|}}{\sqrt{A}}.$$

Располагая явным заданием функции $L(q)$, несложно показать, что её минимум достигается при

$$q = \sqrt{\frac{|B|}{\varepsilon}},$$

т. е. в точности тогда, когда $f(q) = f(q\varepsilon)$. При этом значении q имеем

$$\mathcal{I}(q) = \left[\frac{\sqrt{|B|}}{\sqrt{A}}; \frac{\sqrt{|B|}}{2\sqrt{A}}\left(\varepsilon^{1/2} + \varepsilon^{-1/2}\right)\right].$$

Каждому значению Y, лежащему строго внутри отрезка $\mathcal{I}(q)$, соответствует ровно два значения $\alpha \in [q; q\varepsilon)$ и, следовательно, ровно два значения

$$X = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{B}{\alpha}\right) = \pm\sqrt{AY^2 + B}.$$

Очевидно, значению $Y = \sqrt{|B|}/\sqrt{A}$ соответствует $X = 0$, а при

$$Y = \frac{\sqrt{|B|}}{2\sqrt{A}}\left(\varepsilon^{1/2} + \varepsilon^{-1/2}\right)$$

имеем $X = -\sqrt{AY^2 + B}$. □

Пример 2. Пусть A и B — те же, что и в примере 1. Теперь следует рассматривать только $Y \in \{3, 4, 5, 6\}$. Условие $\sqrt{11Y^2 - 95} \in \mathbb{Z}$ влечёт $Y \in \{3, 4\}$, поэтому базисные решения суть $\pm 2 + 3\sqrt{11}$ и $\pm 9 + 4\sqrt{11}$. Отметим, что контрольная проверка их базисности (как в примере 1) уже не нужна. □

Другой подход связан с желанием получить формулы вида

$$x + y\sqrt{A} = (X_j + Y_j\sqrt{A})\varepsilon^k, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

дающие все решения уравнения (1) в неотрицательных целых числах. Это достигается при

$$q = \sqrt{|B|}.$$

В этом случае базисные решения находятся исходя из условий:

$$0 \leqslant Y < \frac{\sqrt{B}}{2\sqrt{A}}\left(\varepsilon - \varepsilon^{-1}\right), \quad X = \sqrt{AY^2 + B},$$

если $B > 0$, и

$$\frac{\sqrt{|B|}}{\sqrt{A}} \leqslant Y < \frac{\sqrt{|B|}}{2\sqrt{A}}\left(\varepsilon + \varepsilon^{-1}\right), \quad X = \sqrt{AY^2 + B}$$

в случае $B < 0$.

Пример 3. Вновь обратимся к примеру 1. Теперь нам необходимо рассмотреть все значения $Y \in \{3, 4, \ldots, 29\}$. Требованию $\sqrt{11Y^2 - 95} \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют только $Y \in \{3, 4, 13, 24\}$, поэтому базисные решения таковы: $2 + 3\sqrt{11}$, $9 + 4\sqrt{11}$, $42 + 13\sqrt{11}$ и $79 + 24\sqrt{11}$. □

Этот же результат можно получить другим способом. Для этого нужно «плохие» базисные решения $-2 + 3\sqrt{11}$ и $-9 + 4\sqrt{11}$ (см. пример 2) умножить на $\varepsilon = 10 + 3\sqrt{11}$:

$$(-2 + 3\sqrt{11})(10 + 3\sqrt{11}) = 79 + 24\sqrt{11}, \quad (-9 + 4\sqrt{11})(10 + 3\sqrt{11}) = 42 + 13\sqrt{11}.$$

Вообще, анализируя примеры 1 — 3, можно сделать вывод: при отыскании базисных решений наиболее выгодным представляется выбор масштабного множителя (6).

Приведём типичный пример, показывающий преимущество нового подхода к отысканию базисных решений (выбор условия (5) с масштабным множителем (6)) перед стандартным.

Рассмотрим следующее *параметрическое* уравнение Пелля

$$x^2 - (d^2 + 2)y^2 = -3,$$

где d — натуральное число. При $d = 1$ оно разрешимо и, следовательно, имеет бесконечно много решений.

Пример 4. Пусть $A = 3$ и $B = -3$. Тогда $\varepsilon = 2 + \sqrt{3}$ и существует единственное базисное решение $\sqrt{3}$. Все решения уравнения $x^2 - 3y^2 = -3$ в целых числах даются формулой

$$x + y\sqrt{3} = \pm\sqrt{3}\,(2 + \sqrt{3})^k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Взяв знак «плюс» и $k \in \mathbb{N}_0$, получим все решения в неотрицательных целых числах. □

Покажем, что при любом $d \geqslant 2$ это уравнение не имеет решений.

При стандартном подходе несколько грубое, но правильное представление о величине верхней границы для компоненты Y даёт выражение

$$\frac{|B| + \varepsilon}{2\sqrt{A}}.$$

При новом подходе эту роль играет выражение

$$\frac{\sqrt{|B|\varepsilon}}{\sqrt{A}}$$

(*среднее арифметическое* величин $|B|$ и ε заменяется их *средним геометрическим*, которое, вообще говоря, меньше). В нашем примере

$$\varepsilon \leqslant d^2 + 1 + d\sqrt{d^2 + 2} \sim 2d^2,$$

поскольку пара $(x, y) = (d^2 + 1, d)$ удовлетворяет ассоциированному уравнению Пелля.

На самом деле $\varepsilon = d^2 + 1 + d\sqrt{d^2+2}$ при любом $d \geqslant 1$. Действительно, иначе

$$d^2 + 1 + d\sqrt{d^2+2} = (x_0 + y_0\sqrt{d^2+2})^k \geqslant (x_0 + y_0\sqrt{d^2+2})^2 > (d + \sqrt{d^2+2})^2,$$

поскольку $y_0 \geqslant 1$ и $x_0 = \sqrt{y_0^2(d^2+2)+1} > d$. Но нервенство

$$d^2 + 1 + d\sqrt{d^2+2} > (d + \sqrt{d^2+2})^2$$

невозможно ни при каком $d \geqslant 1$.

Таким образом, при стандартном подходе верхняя граница для Y имеет порядок

$$\frac{1+d^2}{d} \sim d,$$

и неясно, как найти все возможные значения Y при произвольном d. В то же время при новом подходе порядок верхней границы для Y есть

$$\frac{\sqrt{1 \cdot d^2}}{d} = 1,$$

что после конкретизации константы приводит к конечному и не зависящему от d списку возможных значений Y. Фактически же речь идёт только об одном таком значении: $Y = 1$.

Действительно, при $A = d^2 + 2$ и $B = -3$ верхняя граница

$$\frac{\sqrt{|B|}}{2\sqrt{A}}\left(\varepsilon^{1/2} + \varepsilon^{-1/2}\right)$$

для Y независимо от d равна $\sqrt{3/2}$. Значит, $Y = 1$ — единственное возможное значение.

Теперь осталось выяснить, может ли число

$$X = \pm\sqrt{(d^2+2)\cdot 1^2 - 3} = \pm\sqrt{d^2-1}$$

при каком-нибудь $d \geqslant 2$ оказаться целым. Легко видеть, что нет. Но тогда базисных решений тоже нет, а значит, рассматриваемое уравнение неразрешимо для всех $d \geqslant 2$.

Ещё одним примером, где естественно возникает параметрическое уравнение Пелля, является следующая

Задача 1. *Пусть a, b — натуральные числа, причём число*

$$c = \frac{a^2 - b^2 + 8}{ab}$$

также является натуральным. Чему оно может быть равно?

Решение 1. Прежде всего, число c должно быть чётным, ибо, как показывает несложная проверка, равенство

$$a^2 - b^2 + 8 = cab$$

с нечётным c невозможно по модулю 8. Положив $c = 2d$, мы можем переписать это равенство в виде

$$x^2 - (d^2 + 1)y^2 = -8, \tag{7}$$

где $x = a - db$, $y = b$.

Исследуем уравнение Пелля (7) при всевозможных натуральных d.

Сначала заметим, что

$$\varepsilon = 2d^2 + 1 + 2d\sqrt{d^2 + 1} \tag{8}$$

и, таким образом, $\varepsilon \sim 4d^2$. Впрочем, для дальнейших оценок нам достаточно неравенства

$$\varepsilon \leqslant 2d^2 + 1 + 2d\sqrt{d^2 + 1},$$

которое имеет место, ибо пара $(x, y) = (2d^2 + 1, 2d)$ является решением ассоциированного уравнения Пелля.

Равенство (8) можно обосновать, опираясь на следующий факт.

Лемма. *Если уравнение*

$$x^2 - Ay^2 = -1 \tag{9}$$

разрешимо, то все его решения имеют вид

$$x + y\sqrt{A} = \pm\varepsilon^{k-1/2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

В частности, минимальное решение ξ уравнения (9) равно $\varepsilon^{1/2}$.

Доказательство. Достаточно заметить следующее: если $\alpha \in [\varepsilon^{-1/2}; \varepsilon^{1/2})$ — базисное решение уравнения (9), то $\alpha^2 \in [\varepsilon^{-1}; \varepsilon)$ — некоторое решение уравнения (1). Но это возможно только если $\alpha^2 = \varepsilon^{-1}$ (поскольку $\alpha \neq 1$). Таким образом, $\alpha = \varepsilon^{-1/2}$. □

В частности, зная ξ, можно найти ε по формуле $\varepsilon = \xi^2$. В нашем случае

$$\xi = d + \sqrt{d^2 + 1},$$

так что $\varepsilon = 2d^2 + 1 + 2d\sqrt{d^2 + 1}$.

Как и выше, применив новый подход, можно найти все возможные значения Y и затем отыскать все базисные решения уравнения (7), если они существуют. Не останавливаясь на деталях, приведём лишь ответ: уравнение (7) разрешимо только при $d = 1$ и $d = 4$. $\square$

Для полноты изложения приведём элементарное решение этой задачи — *методом бесконечного спуска*.

Решение 2. Допустим, что для некоторого натурального $c \notin \{2, 8\}$ нашлась пара (a, b) натуральных чисел, удовлетворяющая равенству

$$a^2 - b^2 + 8 = cab.$$

Нетрудно проверить, что при $b = 1$ или $b = 2$ такое невозможно, поэтому далее считаем $b \geqslant 3$. Положим

$$a_1 = a - cb, \quad b_1 = b - ca_1 = (c^2 + 1)b - ca.$$

Заменив в этих равенствах c на $(a^2 - b^2 + 8)/(ab)$, мы получим

$$a_1 = \frac{b^2 - 8}{a}, \quad b_1 = \frac{8a^2 + (b^2 - 8)^2}{a^2 b},$$

откуда следует, что a_1 и b_1 — натуральные числа. Более того, для них справедливо равенство

$$a_1^2 - b_1^2 + 8 = ca_1 b_1.$$

Итак, пара (a_1, b_1) удовлетворяет тем же условиям, что и пара (a, b), но «меньше» последней, так как $b_1 = b - ca_1 < b$. Но тогда возможен бесконечный спуск: $(a, b) \to (a_1, b_1) \to \ldots$ $\square$

Сформулируем теперь один элементарный факт, помогающий устанавливать неразрешимость уравнения Пелля.

Теорема 2. *Если уравнение* (1) *разрешимо, то существует решение* (X, Y) *в неотрицательных целых числах, для которого*

$$XY \leqslant \frac{|B| y_0}{2}. \qquad (10)$$

Доказательство. Допустим, что для всех решений в неотрицательных целых числах выполняется противоположное неравенство

$$XY > \frac{|B| y_0}{2}. \qquad (11)$$

Пусть (X, Y) — одно из таких решений. Тогда пара чисел

$$(X_1, Y_1) = (|x_0 X - A y_0 Y|, |x_0 Y - y_0 X|)$$

даст ещё одно решение, при этом, как сейчас будет показано, $Y_1 < Y$.

В самом деле, неравенство $Y_1^2 < Y^2$ равносильно неравенству

$$2Ay_0Y^2 + By_0 < 2x_0XY$$

(здесь и далее мы заменяем X^2 на $AY^2 + B$, а x_0^2 на $Ay_0^2 + 1$). Левая часть

$$2Ay_0Y^2 + By_0 = Ay_0Y^2 + y_0(AY^2 + B) = Ay_0Y^2 + y_0X^2$$

последнего неравенства положительна, поэтому оно равносильно неравенству

$$(2Ay_0Y^2 + By_0)^2 < (2x_0XY)^2.$$

После упрощения получим

$$4Y^2(AY^2 + B) > B^2y_0^2,$$

что равносильно (11).

Итак, неравенство $Y_1 < Y$ действительно имеет место. Но это инициирует бесконечный спуск, что и доказывает теорему. $\square$

Утверждение теоремы 2 в несколько ином виде можно найти в книге [2].

Можно показать, что неравенство (10) равносильно неравенству

$$Y \leqslant \sqrt{\frac{|B|x_0 - B}{2A}}.$$

Именно в таком виде его удобно применять при решении задач.

...

Список литературы

[1] *Спивак А.В.* Уравнения Пелля // Квант. 2002. № 4. С. 5—11.

[2] *Barbeau E.J.* Pell's equation. New-York: Springer-Verlag, 2003.