Олег Полубасов   25.12.2020 г.

ММ261 (4 балла)

Решения принимаются до 24:00 msk 13.03.2021

Натуральные числа 1, 2, 3, …, 100 разбили на 10 групп по 10 чисел. Найти наибольшую возможную сумму НОД этих десяток.

===

НОД (9, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99) = 9.
НОД (8, 16, 32, 40, 48, 56, 64, 80, 88, 96) = 8.
НОД (7, 14, 21, 28, 35, 49, 70, 77, 91, 98) = 7.
НОД (6, 12, 18, 24, 30, 42, 60, 66, 78, 84) = 6.
НОД (5, 10, 20, 25, 50, 55, 65, 85, 95, 100) = 5.
НОД (3, 15, 33, 39, 51, 57, 69, 75, 87, 93) = 3.
НОД (2, 4, 22, 26, 34, 38, 44, 46, 52, 58) = 2.
НОД (1, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41) = 1.
НОД (43, 47, 53, 59, 61, 62, 67, 68, 71, 73) = 1.
НОД (74, 76, 79, 82, 83, 86, 89, 92, 94, 97) = 1.

Ответ. 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 43.

1. Доказательство максимальности ответа

Обозначим через $M(x_1,\dots x_n)$ множество чисел в первой сотне, кратных хотя бы одному из чисел $\{x_1,\dots x_n\}$. $M(x_1,\dots x_n) = M(x_1) \cup \dots M(x_n)$.

$|M(x_1,\dots x_n)|$ удобно считать методом включения-исключения, зная, что $|M(x)| = [100/x]$, а $|M(x_1) \cap \dots M(x_n)| = |M(\text{НОК}(x_1,\dots x_n))|$.

$|M(10)| = 10$ => групп с НОД = 10 может быть не более 1.
$|M(9)| = 11$ => групп с НОД = 9 может быть не более 1.
$|M(8)| = 12$ => групп с НОД = 8 может быть не более 1.
$|M(7)| = 14$ => групп с НОД = 7 может быть не более 1.
$|M(6)| = 16$ => групп с НОД = 6 может быть не более 1.
$|M(5)| = 20$ => групп с НОД = 5 может быть не более 2.
$|M(4)| = 25$ => групп с НОД = 4 может быть не более 2.
$|M(3)| = 33$ => групп с НОД = 3 может быть не более 3.
$|M(2)| = 50$ => групп с НОД = 2 может быть не более 5.

Есть 22 числа, не кратных ни одному из чисел 2..10, поэтому не менее трёх групп будут иметь НОД, равный 1.

Введём функцию H(condition), которая вычисляет верхнюю границу суммы НОД групп, если выполнено условие condition, без учёта того, что на одно число могут претендовать несколько групп с разными НОД. Например, если условий нет, то H() = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 5 + 1 + 1 + 1 = 53.

1.1. Наложим условие, чтобы в сумме НОД групп были 10 и 9.

|M(10, 9, 8)| = 29 => групп с НОД = 8 не может быть.
|M(10, 9, 7)| = 32 => групп с НОД = 7 может быть не более 1.
|M(10, 9, 6)| = 29 => групп с НОД = 6 не может быть.
|M(10, 9, 5)| = 29 => групп с НОД = 5 не может быть.
|M(10, 9, 4)| = 38 => групп с НОД = 4 может быть не более 1.
|M(10, 9, 3)| = 40 => групп с НОД = 3 может быть не более 2.
|M(10, 9, 2)| = 56 => групп с НОД = 2 может быть не более 3.

H(10, 9) = 10 + 9 + 7 + 4 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 41.

Так как 41 < 43, эта ветка не может дать результата, лучше имеющегося (43), и поэтому отсекается.

1.2. Наложим условие, чтобы в сумме НОД групп были 10 и 8.

|M(10, 8, 7)| = 32 => групп с НОД = 7 может быть не более 1.
|M(10, 8, 6)| = 29 => групп с НОД = 6 не может быть.
|M(10, 8, 5)| = 30 => групп с НОД = 5 может быть не более 1.
|M(10, 8, 4)| = 30 => групп с НОД = 4 может быть не более 1.
|M(10, 8, 3)| = 46 => групп с НОД = 3 может быть не более 2.
|M(10, 8, 2)| = 50 => групп с НОД = 2 может быть не более 3.

H(10, 8) = 10 + 8 + 7 + 5 + 4 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 = 43.

Эта ветка не может дать результата, лучше имеющегося (43), и поэтому отсекается.

1.3. Наложим условие, чтобы в сумме НОД групп было 10, но не было ни 9, ни 8.

|M(10, 7)| = 23 => групп с НОД = 7 может быть не более 1.
|M(10, 6)| = 23 => групп с НОД = 6 может быть не более 1.
|M(10, 5)| = 20 => групп с НОД = 5 может быть не более 1.
|M(10, 4)| = 30 => групп с НОД = 4 может быть не более 2.
|M(10, 3)| = 40 => групп с НОД = 3 может быть не более 3.
|M(10, 2)| = 50 => групп с НОД = 2 может быть не более 4.

$H(10, \cancel{9}, \cancel{8}) = 10 + 7 + 6 + 5 + 4 + 4 + 3 + 1 + 1 + 1 = 42$.

Так как 42 < 43, эта ветка отсекается.

Из результатов 1.1 – 1.3 следует, что для получения результата, лучше имеющегося (43), в сумме НОД групп не должно быть слагаемого 10.

$H(\cancel{10}, \cancel{9}) = 8 + 7 + 6 + 5 + 5 + 4 + 4 + 1 + 1 + 1 = 42$
$H(\cancel{10}, \cancel{8}) = 9 + 7 + 6 + 5 + 5 + 4 + 4 + 1 + 1 + 1 = 43$

Следовательно, в лучшем результате должны присутствовать и 9, и 8.

|M(9, 8, 7)| = 34 => групп с НОД = 7 может быть не более 1.
|M(9, 8, 6)| = 30 => групп с НОД = 6 может быть не более 1.
|M(9, 8, 5)| = 38 => групп с НОД = 5 может быть не более 1.
|M(9, 8, 4)| = 34 => групп с НОД = 4 может быть не более 1.
|M(9, 8, 3)| = 41 => групп с НОД = 3 может быть не более 2.
|M(9, 8, 2)| = 56 => групп с НОД = 2 может быть не более 3.

H(~~10~~, 9, 8) = 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 1 + 1 + 1 = 45.
H(~~10~~, 9, 8, ~~6~~) = 9 + 8 + 7 + 5 + 4 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 = 42.
Следовательно, в лучшем результате должны присутствовать и 9, и 8, и 6.

|M(9, 8, 6, 7)| = 40 => групп с НОД = 7 может быть не более 1.
|M(9, 8, 6, 5)| = 44 => групп с НОД = 5 может быть не более 1.
|M(9, 8, 6, 4)| = 39 => групп с НОД = 4 не может быть.
|M(9, 8, 6, 3)| = 41 => групп с НОД = 3 может быть не более 1.
|M(9, 8, 6, 2)| = 56 => групп с НОД = 2 может быть не более 2.

H(~~10~~, 9, 8, 6) = 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 43.
Эта ветка не может дать результата, лучше имеющегося (43), и поэтому отсекается.

Больше веток нет, поэтому доказано, что набор НОД, приведённый в ответе, - наилучший. Более глубокий анализ показывает, что он и единственный с такой суммой.

А вот оптимальных распределений чисел по группам – много.

2. Обобщение

Если рассмотреть задачу не с 10 группами по 10 чисел, а с N группами по N чисел то получим последовательность, которой нет в OEIS:
1, 3, 6, 9, 14, 17, 24, 29, 37, 43, 52, 60, 73, 81, 91, 104, 118, 128, 147, 157, 172, 184.