Задача. Для функции

$$f(x) = 2013 - a + \cos(2\pi x) - 8x^3 - 12x^2 - 20x$$

найдите количество целых значений a, при каждом из которых уравнение

$$\underbrace{f(\ldots f}_{2013}(x)\ldots) = 2x + 1$$

на отрезке $[49, 50]$ имеет единственное решение.

Ответ. 60017.

Решение. При любом a функция $f(x)$ убывает на всей числовой оси. Значит, функция

$$g(x) = \underbrace{f(\ldots f}_{2013}(x)\ldots)$$

также убывает на всей числовой оси. Следовательно, уравнение

$$g(x) = 2x + 1$$

имеет единственный корень x^*. Воспользуемся тем, что этот корень можно хорошо приблизить единственным корнем x_1 уравнения

$$f(x) = x.$$

Предварительно заметим, что

$$|g'(x)| > (14 - 2\pi)^{2013} > 7^{2013}$$

при любом x (следует по индукции из неравенства $|f'(x)| > 14 - 2\pi$). Имеем

$$g(x^*) - g(x_1) = M(x^* - x_1),$$

где $M = g'(\xi)$ для некоторого ξ между x^* и x_1 (*теорема Лагранжа*). Значит,

$$2x^* + 1 - x_1 = M(x^* - x_1),$$

откуда находим

$$x_1 = x^* + \frac{x^*}{1 - M}, \quad x^* = x_1 - \frac{x_1 + 1}{2 - M}, \tag{$*$}$$

при этом $-M > 7^{2013}$.

Пусть теперь значение параметра a таково, что $49 \leqslant x^* \leqslant 50$. Тогда из 1-го равенства $(*)$ следует оценка

$$49 < x_1 < 50 + \varepsilon_1,$$

где $\varepsilon_1 = 10^{-1500}$. Следовательно,

$$f(49) > 49, \quad f(50 + \varepsilon_1) < 50 + \varepsilon_1,$$

что равносильно системе неравенств

$$-1029037 - 61221\varepsilon_1 + \cos 2\pi\varepsilon_1 - 1212\varepsilon_1^2 - 8\varepsilon_1^3 < a < -969019,$$

которой удовлетворяют целые числа a от -1029036 до -969020 (всего 60017 значений).

Обратно, пусть a — одно из целых чисел от -1029036 до -969020. Тогда выполнены неравенства

$$f(49) > 49, \quad f(50) \leqslant 50,$$

Более того, можно утверждать, что

$$f(49+\varepsilon_2) > 49, \quad f(50) \leqslant 50,$$

где $\varepsilon_2 = 10^{-10}$. (Действительно, последнюю систему неравенств можно записать в виде

$$-1029036 \leqslant a < -969020 + \cos 2\pi\varepsilon_2 - 58820\varepsilon_2 - 1188\varepsilon_2^2 - 8\varepsilon_2^3,$$

что верно для указанных значений a и $\varepsilon_2 = 10^{-10}$.) Значит,

$$49 + \varepsilon_2 < x_1 \leqslant 50.$$

Но тогда из 2-го равенства $(*)$ получим оценку $49 < x^* < 50$.