ПОДОБНО-ВПИСАННЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Пусть ABC – некоторый треугольник, точки K, L, M лежат соответственно на сторонах AB, BC и AC, а s – некоторое действительное число, отличное от 0 и 1. Треугольник KLM будем называть подобно-вписанным в ΔABC, если

- $AK = sAB, BL = sBC, CM = sCA$;
- треугольник KLM подобен треугольнику ABC.

Мы исключили из рассмотрения значения s, равные 0 и 1, чтобы не считать треугольник подобно-вписанным в себя.

Очевидно, что срединный треугольник является частным случаем подобно-вписанного (иначе какое же это было обобщение?!). Поэтому у каждого треугольника есть, по крайней мере, один подобно-вписанный. Еще одно очевидное наблюдение – у правильного треугольника бесконечно много подобно-вписанных (второе условие из определения для них выполняется автоматически). Позже мы убедимся, что для любого треугольника, отличного от правильного, множество подобно-вписанных в него треугольников конечно. В дальнейшем мы будем предполагать, что исходный треугольник отличен от равностороннего.

Воспользуемся параметризацией треугольников, введенной в ММ80 то есть предположим в некоторой декартовой системе координат вершины исходного треугольника: $A(-1;0)$, $B(1;0)$, $C(x;y)$. Тогда координаты точек K, L, M будут такими: К$(2s-1;0)$, $L(1+sx-s;ys)$, $M(x-s-xs;y-sy)$.

Существует 6 разных способов сопоставить вершины треугольников ABC и KLM. Приступая к их рассмотрению, мы сомневались в успехе нашей затеи. Ведь для подобия треугольников требуется выполнение двух равенств. Это может быть равенство косинусов двух пар соответствующих углов (в отличие от синуса, косинус угла треугольника однозначно определяет этот угол) или пропорциональность соответствующих сторон. Но все равно требуемых равенств будет два. А у нас всего одна степень свободы – s. Поэтому мы ожидали, что нетривиальные подобно-вписанные треугольники, возможно, существуют не для всех исходных треугольников, а для какого-то специального класса треугольников.

С другой стороны, некоторые из систем, описывающих пропорциональность сторон, несмотря на переопределенность (два уравнения, одна неизвестная), заведомо обязаны быть совместными. Например, пропорция $\frac{LM}{AB} = \frac{KM}{BC} = \frac{KL}{AC}$ приводит к системе

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{(1+sx-x)^2+(2sy-y)^2} = \frac{\sqrt{(sx+3s-x-1)^2+(sy-y)^2}}{\sqrt{(1-x)^2+y^2}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{(1+sx-x)^2+(2sy-y)^2} = \frac{\sqrt{(sx-3s+2)^2+(sy-y)^2}}{\sqrt{(1+x)^2+y^2}} \end{cases} \quad (1)$$

которая при любом наборе значений параметров x и y обязана иметь, по крайней мере, одно решение $s = \frac{1}{2}$, поскольку это значение s соответствует срединному треугольнику ΔABC.

Эти соображения настраивают на оптимистический лад. Почему бы и пропорциям при других сопоставлениях вершин не приводить к разрешимым системам?

Система (1) и в самом деле имеет решение $s_0 = \frac{1}{2}$ (если бы это было не так, мы бы не двигались дальше, а занялись поиском ошибок в наших выкладках). Причем это решение – единственное.

Каждая из пропорций $\frac{KL}{AB} = \frac{LM}{BC} = \frac{KM}{AC}$ и $\frac{KM}{AB} = \frac{KL}{BC} = \frac{LM}{AC}$ также имеет единственное решение. В первом случае, это 0, а во втором 1. Но мы договорились исключить из рассмотрения эти значения.

Рассмотренные пропорции исчерпывают все случаи, когда треугольники ABC и KLM одинаково ориентированы. Таким образом, у неравностороннего треугольника не существует нетривиальных подобно-вписанных треугольников, одинаково ориентированных с исходным.

Пропорция $\frac{KL}{AB} = \frac{KM}{BC} = \frac{LM}{AC}$ приводит к системе с единственным решением $s_1 = \frac{-4x}{x^2+y^2-6x-3}$. И у нас появился первый нетривиальный подобно-вписанный треугольник.

Пропорция $\frac{LM}{AB} = \frac{KL}{BC} = \frac{KM}{AC}$ дает решение $s_2 = \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2-2x-3}{x^2+y^2-3}$.

Наконец, пропорция $\frac{LM}{AB} = \frac{KL}{BC} = \frac{KM}{AC}$ приводит к последнему решению $s_3 = \frac{x^2+y^2+2x-3}{x^2+y^2+6x-3}$.

Таким образом, имеется 4 значения s, для которых возможны подобно-вписанные треугольники:

$$s_0 = \frac{1}{2};\ s_1 = \frac{-4x}{x^2+y^2-6x-3};\ s_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+y^2-2x-3}{x^2+y^2-3};\ s_3 = \frac{x^2+y^2+2x-3}{x^2+y^2+6x-3} \quad (2)$$

Однако, не любой треугольник, отличный от равностороннего, имеет 4 подобно-вписанных треугольника. Пусть ΔABC – равнобедренный (но не равносторонний). Тогда $x^2 + y^2 + 2x = 3$. или

$x = 0$ Во втором случае имеем: $s_1 = 0,\ s_2 = \frac{1}{2}, s_3 = 1$. А в первом – $s_1 = \frac{1}{2},\ s_2 = 1, s_3 = 0$. То есть для равнобедренного треугольника единственным подобно-вписанным треугольником является срединный. Читателям, которых смутил тот факт, что решения, полученные в предположении, что ΔKLM противоположно ориентирован с ΔABC, совпали с решениями, полученными в предположении одинаковой ориентированности этих треугольников, сообщим, что с равнобедренными треугольниками такое бывает.

Перейдем к рассмотрению разносторонних треугольников. Для удобства заменим названия вершин K, L и M на A_n, B_n и C_n, где n – номер решения, таким образом, что $\angle A = \angle A_n, \angle B = \angle B_n$ и $\angle C = \angle C_n$. Еще раз (теперь уже без оговорок) отметим, что все треугольники, кроме срединного ($\Delta A_0B_0C_0$), будут иметь ориентацию, противоположную исходному.

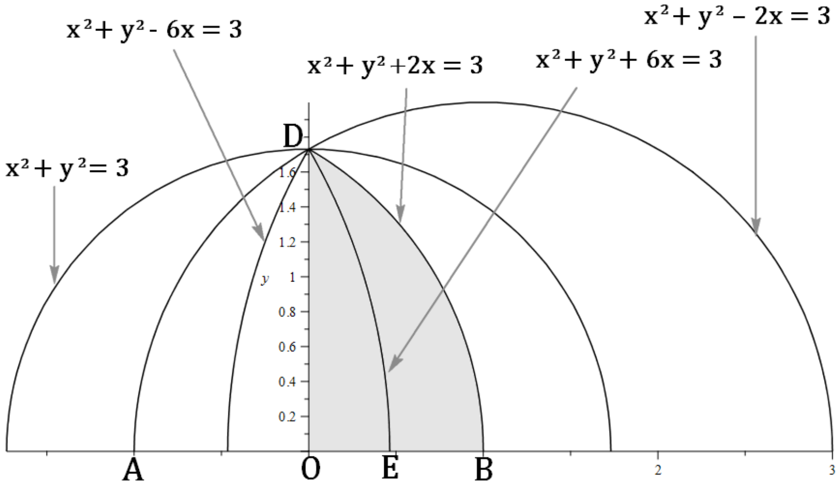

Рис. 1

Поскольку ΔABC разносторонний, точка C лежит внутри области ODB (которую, как и в предыдущем сюжете, мы обозначим через T). Чтобы изучить поведение s_1, s_2 и s_3, рассмотрим, где обращаются в 0 числители и знаменатели этих выражений. Ясно, что левее оси абсцисс (а значит, и в области T) числитель s_1 отрицателен.

Разобраться со знаками остальных выражений поможет рисунок 1. Знаменатель s_1 обращается в 0 в точке D (как и все остальные интересующие нас величины), а во всех остальных точках области T отрицателен. Поэтому $s_1 > 0$.

В то же время, для C справедливо $x^2 + 2x + y^2 < 3$. Это равносильно тому, что $x^2 + y^2 - 6x - 3 < -8x$. Поделив обе части последнего неравенства на отрицательное число $2(x^2 + y^2 - 6x - 3)$, получим $s_1 < \frac{1}{2}$. Итак, $0 < s_1 < \frac{1}{2}$.

Заметим, что $s_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2+y^2-2x-3}{x^2+y^2-3} = \frac{1}{2} - \frac{x}{x^2+y^2-3}$. Внутри области T вычитаемое отрицательно, поэтому $s_2 > \frac{1}{2}$. И вновь учтем, что внутри T $x^2 + y^2 + 2x < 3$, то есть $x^2 + y^2 - 3 < -2x$. Отсюда, учитывая отрицательность обеих частей, $s_2 = \frac{1}{2} - \frac{x}{x^2+y^2-3} < \frac{1}{2} - \frac{x}{-2x} = 1$. Окончательно, получаем $\frac{1}{2} < s_2 < 1$.

Осталось рассмотреть s_3. Приравнивая к нулю числитель, получим граничную дугу области T. А знаменатель обращается в ноль, когда C принадлежит дуге DE, характеризующей, так называемые, автомедианные треугольники (треугольники, подобные треугольникам, составленными из их медиан). Если C лежит левее дуги этой окружности, то $s_3 > 1$, а если правее, то $s_3 < 0$. В любом случае вершины треугольника $A_3B_3C_3$, отвечающего значению s_3, лежат на продолжениях сторон исходного треугольника. Область значений s_3 – $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Оказывается, значения s_1, s_2 и s_3 определяются не парой чисел (координатами точки C), а всего одним числом. Рассмотрим семейство окружностей, проходящих через точку D, центры которых, принадлежат лучу $(-\infty;-1]$. Дуги этих окружностей вместе с отрезком оси ординат (который можно считать дугой окружности бесконечного радиуса) заметают область T. Непосредственно проверяется, что значения s_1, s_2 и s_3 зависят только от радиуса соответствующей окружности. Впрочем, более удобно принять за параметр не радиус, а расстояние от центра до начала координат. Обозначим это расстояние через z. Каждой внутренней точке области T (с границей области, соответствующей равнобедренным треугольникам, мы уже разобрались) соответствует одно значение $z \in (0; \infty)$. Выражая y^2 из уравнения окружности $(x + z)^2 + y^2 = z^2 + 3$ и подставляя в (2), получим:

$$s_1=\frac{2}{z+3},\ s_2=\frac{z+1}{2z},\ s_3=\frac{z-1}{z-3} \tag{3}$$

Через координаты C параметр z выражается так: $z=\frac{3-x^2-y^2}{2x}$.

Любопытно, что выражения для s_1, s_2, s_3 (не важно, через z или через x и y) удовлетворяют некоторому правилу «сложения» дробей, часто применяемому двоечниками. А именно, $s_2=s_1\langle+\rangle\, s_3$, где $\langle+\rangle$ – «сложение» дробей по правилу: числитель с числителем, знаменатель со знаменателем.

Обозначим через S площадь исходного треугольника. При движении центра окружности по оси абсцисс от минус бесконечности до точки A значения s_1 и s_2 монотонно возрастают соответственно от 0 до $\frac{1}{2}$ для s_1 и от $\frac{1}{2}$ до 1 для s_2. При этом площадь $\Delta A_1B_1C_1$ монотонно уменьшается от S до $\frac{1}{4}S$, а площадь $\Delta A_2B_2C_2$ наоборот возрастает от $\frac{1}{4}S$ до S. Поэтому существует ровно одно значение z, при котором эти площади равны. Значение s_3 также монотонно растет от 1 до $+\infty$ при движении центра от $-\infty$ до точки $G(-3;0)$ и от $-\infty$ до 0 при движении центра от точки G до точки A. При этом площадь $\Delta A_3B_3C_3$ сначала возрастает от S до $+\infty$, а затем (на участке от G до A) вновь убывает до S.

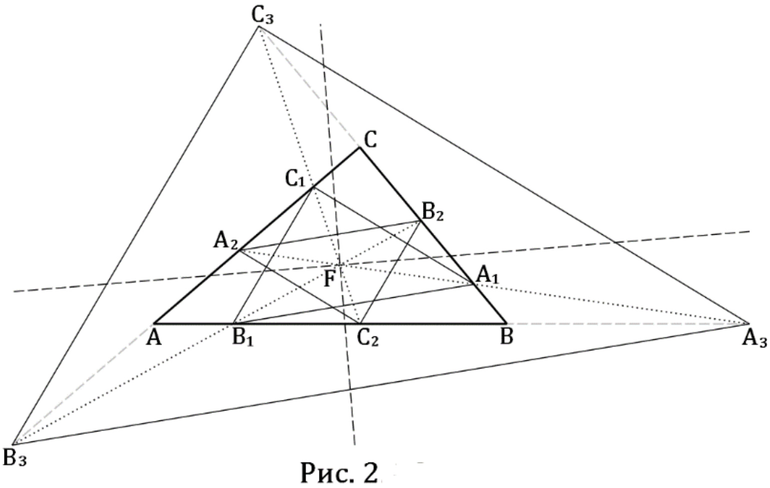

Рис. 2

Найдем коэффициент подобия подобно-вписанного треугольника $A_iB_iC_i$ исходному. Площадь каждого из отсекаемых треугольников равна $Ss_i(1-s_i)$. Поэтому для площади $A_iB_iC_i$ имеем выражение $S(1-3s_i(1-s_i))$. Учитывая, что отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия, получим для этого коэффициента выражение $\sqrt{3s_i^2-3s_i+1}$.

Как уже отмечалось, исходный треугольник и все подобно вписанные треугольники имеют общий центроид. Обозначим его через F.

Не сложно убедиться, что треугольники $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$ гомотетичны с центром гомотетии в точке F.

Треугольники $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$ противоположно ориентированы по отношению к исходному и подобны, но не равны ему. Поэтому каждый из них может быть получен из исходного центрально-подобной симметрией, то есть, композицией осевой симметрии и гомотетии, центр которой лежит на оси симметрии.

Зная центр центрально-подобной симметрии (F) и координаты исходных точек и их образов, не сложно найти возможные оси. В качестве оси симметрии можно взять любую из перпендикулярных прямых, пересекающихся в точке F, угловые коэффициенты которых удовлетворяют уравнению: $k^2+\frac{x^2+y^2-3}{xy}k-1=0$.

На рис. 2 представлен исходный треугольник и три подобно-вписанных в него треугольника для случая, когда вершина C лежит левее дуги DE, а именно для $C\left(\frac{1}{6};1\right)$. На рисунке нет срединного треугольника, поскольку линий на рисунке хватает и без него.

Для этого случая $z=\frac{71}{12}$, $s_1=\frac{24}{107}$, $s_2=\frac{83}{142}$, $s_3=\frac{59}{35}$. Для внешнего подобно-вписанного треугольника равновеликими являются треугольники AB_3A_3, BA_3C_3 и CC_3B_3. Пунктирные линии, пересекающиеся в точке F – оси центрально-подобной симметрии. А точечные пунктирные линии, пересекающиеся в той же точке, иллюстрируют гомотетичность треугольников $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$.

Случай расположения точки C правее дуги DE представлен на рис. 3. Для изображенного на нем треугольника $C\left(\frac{1}{2};1\right)$, $z=\frac{4}{7}$, $s_1=\frac{8}{19}$, $s_2=\frac{11}{14}$, $s_3=-\frac{3}{5}$.

Коэффициент гомотетии для $\Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta A_2B_2C_2$ всегда отрицателен. Треугольник $A_3B_3C_3$ гомотетичен с положительным коэффициентом большему из треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$.

Нам осталось рассмотреть случай, когда C лежит на дуге DE. Он соответствует автомедианным треугольникам. Разносторонние автомедианные треугольники не имеют внешнего подобно-вписанного треугольника. Зато они имеют целый ряд красивых свойств, сформулированных в терминах подобно-вписанных треугольников.

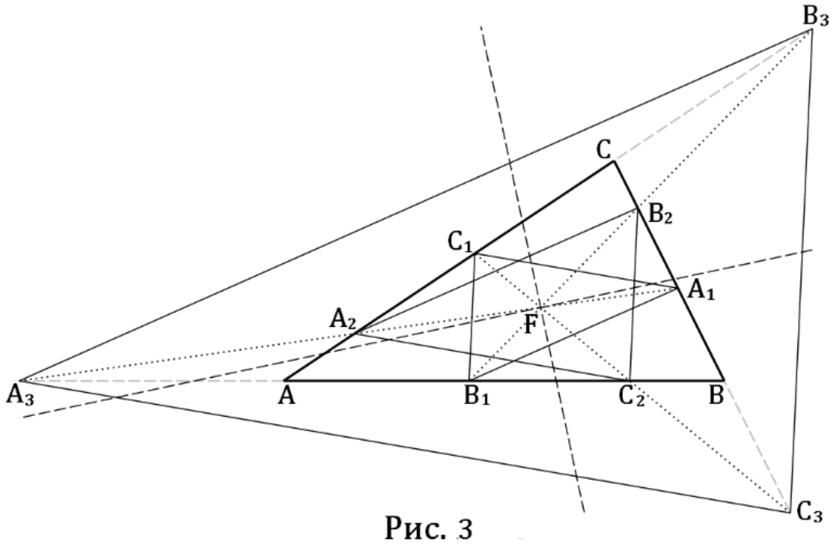

Рис. 3

Пусть треугольник ABC – разносторонний и $\alpha < \beta < \gamma$ – углы при вершинах A, B и C.

Тогда следующие 9 утверждений попарно эквивалентны.

1. Треугольник ABC – автомедианый.
2. Существуют ровно три подобно-вписанных треугольника.
3. Два подобно-вписанных треугольника равны между собой.
4. Два подобно-вписанных треугольника центрально-симметричны.
5. Площадь хотя бы одного подобно-вписанного треугольника равна третьей части площади треугольника ABC.
6. Вершина, по крайней мере, одного подобно-вписанного треугольника делит соответствующую сторону исходного треугольника в отношении 1: 2.
7. $s_1 + s_2 = 1$.
8. $z = 3$.
9. $\operatorname{tg}^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\beta - 2\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta - 2\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta = 0$.

Отметим, что свойства 2, 3 и 4 приведены в работе [1].

Равносильность первых 8 утверждений в значительной мере уже проверена выше. Недостающие импликации легко выводятся из формул (2) и (3).

Чтобы обосновать равносильность автомедианности 9-му утверждению, заметим, что $y = \operatorname{tg}\alpha\,(1 + x)$, $y = \operatorname{tg}\beta\,(1 - x)$. Из этих соотношений выразим x и y через α и β

$$x = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}, \quad y = \frac{2\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}$$

Для получения требуемого результата остается подставить эти выражения в формулу $x^2 + y^2 + 6x = 3$, характеризующую автомедианные треугольники.

На рисунке 4 приведены подобно-вписанные треугольники для автомедианного треугольника с вершиной $C\left(\frac{1}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. На этот раз мы включили в их число срединный (на освободившееся место внешнего подобно-вписанного), чтобы читатель не забыл, что он тоже является подобно-вписанным. Чтобы не загромождать чертеж, мы не стали подписывать 6 жирных точек пересечения отрезков A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 со сторонами подобно-вписанных треугольников, но это не помешает читателю выяснить, в каких отношениях эти точки делят все пересекающиеся в них отрезки.

Подведем итоги.

- У равностороннего треугольника существует бесконечно много подобно-вписанных.
- У равнобедренного, но не равностороннего треугольника всего один подобно-вписанный – срединный.

- У разностороннего автомедианного треугольника есть три подобно-вписанных треугольника. Один срединный, а два других противоположно ориентированы с исходным и центрально-симметричны между собой.
- У остальных треугольников по четыре подобно-вписанных. Один срединный. Остальные три противоположно ориентированы с исходным и гомотетичны между собой. Причем вершины ровно одного из них лежат на продолжениях сторон исходного треугольника.

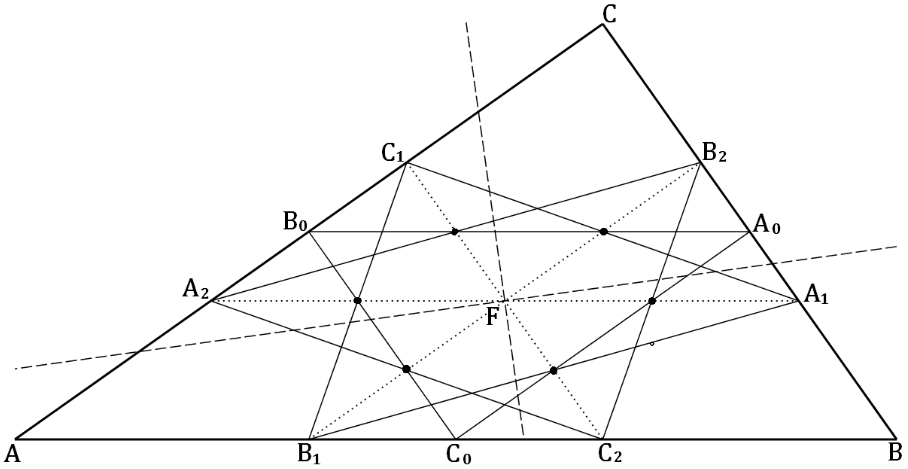

Рис. 4

[1] Grergoire Nicollier. Convolution Filters for Triangles, Forum Geometricorum. Volume 13 (2013), 61–85.