Решение задачи Матмарафона ММ260, Овчинников Денис

4 ноября 2020 г.

Если ABC - равносторонний треугольник, то KLM тоже будет равносторонним в силу поворотной симметрии, поэтому для любого s они подобны. В дальнейшем, если не будет оговорено специально, треугольник ABC полагается не равносторонним. Пусть $AB \geq AC \geq BC$ (где хотя бы одно из неравенств не выполняется). Заметим, что хотя бы один подобный треугольник получается наверняка: при $s = 1/2$ отрезки KL, KM, LM являются средними линиями ABC, то есть все они в два раза меньше соответственных сторон, и треугольники, очевидно, подобны. В общем случае неочевидно, встретятся ли еще подобный треугольник. Выберем систему координат такую, что $A(0,0), B(1,0), C(a,b)$. Обозначим $r = AC = \sqrt{a^2+b^2}, \rho = BC = \sqrt{(1-a)^2+b^2}$, тогда $\rho \leq r \leq 1$.

Заметим, что сторона AC лежит на прямой $ay = bx$, а сторона BC - на $(1-a)y = b(1-x)$. Параметр s определяет положение точек K, L, M так, что они лежат на отрезках AB, BC, AC соответственно: $\frac{AK}{AB} = \frac{BL}{BC} = \frac{CM}{AC} = s$. Запишем их координаты, исходя из указанного:

$$K(s,0)$$
$$L(1-s(1-a), sb)$$
$$M(a(1-s), b(1-s))$$

Квадраты длин сторон определяются выражениями

$$KL^2 = (1+sa-2s)^2 + s^2b^2 = (1-s)(1-2s) + r^2s(1-s) + \rho^2s(2s-1)$$
$$KM^2 = (a-as-s)^2 + b^2(1-s)^2 = s(2s-1) + r^2(1-s)(1-2s) + \rho^2s(1-s)$$
$$LM^2 = (1-s+2as-a)^2 + b^2(1-2s)^2 = s(1-s) + r^2s(2s-1) + \rho^2(1-s)(1-2s)$$

Треугольники ABC и KLM подобны, если их стороны попарно пропорциональны, то есть величины $\{KL, KM, LM\}$ (или какая-то их перестановка) являются тройкой $\{k, kr, k\rho\}$, где k - некоторое действительно число. Избавляясь от k (которое нас в данной задаче не интересует), мы можем записать соотношение, например:

$$\frac{KL}{LM} = r$$
$$\frac{KM}{LM} = \rho$$

Здесь в левой части обоих выражений стоит некая (определенная) функция s, остальные величины полагаем заданными, так что мы получаем систему из двух уравнений для s. И если существует значение s, удовлетворяющее обоим уравнениям, то треугольники подобны, в противном случае - нет. Легко понять, что есть шесть перестановок из трех вершин, поэтому возникнет 6 систем уравнений. Для трех перестановок решения отчасти нам известны - это указанное уже $s = 1/2$, а также вырожденные случаи $s = 0, s = 1$ - то есть, когда точки K, L, M совпадают, в некотором порядке, с A, B, C. Начнем именно с этих перестановок. Для удобства перепишем нашу систему в эквивалентном виде:

$$KL^2 = r^2 LM^2$$
$$KM^2 = \rho^2 LM^2$$

Будем использовать эту форму, меняя только обозначения вершин.

Перестановка 1 (LKM). Рассмотрим перестановку, для которой есть известное решение $s = 1/2$, тогда $LM = 1/2, KL = r/2, KM = \rho/2$, то есть система выглядит так:

$$KL^2 = r^2 LM^2$$
$$KM^2 = \rho^2 LM^2$$

Подставим выражения для длин сторон:

$$(1-s)(1-2s)+r^2 s(1-s)+\rho^2 s(2s-1) = r^2(s(1-s)+r^2 s(2s-1)+\rho^2(1-s)(1-2s))$$
$$s(2s-1)+r^2(1-s)(1-2s)+\rho^2 s(1-s) = \rho^2(s(1-s)+r^2 s(2s-1)+\rho^2(1-s)(1-2s))$$

После упрощения:

$$(s-1+\rho^2 s)(2s-1) = (2s-1)(r^4 s - r^2\rho^2(1-s))$$
$$(2s-1)(s-r^2(1-s)) = (2s-1)(\rho^2 r^2 s - \rho^4(1-s))$$

Как видно, при $s = 1/2$ оба равенства превращаются в тождества - что и следовало ожидать. Выясним, есть ли решение, отличное от этого. Сократив слева и справа $2s-1$, получим линейные уравнения:

$$s-1+\rho^2 s = r^4 s - r^2\rho^2(1-s)$$
$$s-r^2(1-s) = \rho^2 r^2 s - \rho^2(1-s)$$

Решения записываются следующим образом:

$$s = \frac{1-r^2\rho^2}{1+\rho^2-r^2\rho^2-r^4}$$
$$s = \frac{r^2-\rho^4}{1+r^2-r^2\rho^2-\rho^4}$$

Таким образом, при первом значении s имеет место равенство $\frac{KL}{LM} = r$, при втором - $\frac{KM}{LM} = \rho$. Еще раз заметим, что чтобы треугольники были подобны, требуется одновременное соблюдение этих равенств, то есть при одинаковых значениях s:

$$\frac{1-r^2\rho^2}{1+\rho^2-r^2\rho^2-r^4} = \frac{r^2-\rho^4}{1+r^2-r^2\rho^2-\rho^4}$$

Упростив это выражение, получаем равенство

$$r^6+\rho^6-3r^2\rho^2+1 = (r^2+\rho^2+1)(r^4-r^2\rho^2+\rho^4-r^2-\rho^2+1) = 0$$

Найдем ρ, при заданном r. Первый множитель всегда положителен, а дискриминант второго (как уравнения относительно ρ^2) равен $-3(r^2-1)^2$. Поскольку нас интересуют только действительные решения, то есть неотрицательный дискриминант, то r может быть равно только 1. Тогда и $\rho = 1$, то есть треугольник ABC - равносторонний, который уже был рассмотрен. При этом полученные ранее линейные уравнения превратятся в тождества - то есть, как и ожидалось, удовлетворяются для любого s.

Итак, треугольники ABC и LKM (в таком порядке обхода вершин) подобны тогда и только тогда, когда $s = 1/2$.

Перестановка 2 (KML). Следующая перестановка, для которой есть известное решение - $s = 0$, то есть смещения не произошло, и $KL = 1, KM = r, LM = \rho$. Тогда система выглядит так:

$$KM^2 = r^2KL^2$$
$$LM^2 = \rho^2KL^2$$

То есть:

$$s(2s-1)+r^2(1-s)(1-2s)+\rho^2s(1-s) = r^2((1-s)(1-2s)+r^2s(1-s)+\rho^2s(2s-1))$$
$$s(1-s)+r^2s(2s-1)+\rho^2(1-s)(1-2s) = \rho^2((1-s)(1-2s)+r^2s(1-s)+\rho^2s(2s-1))$$

Упрощая и сокращая на s, снова получим линейные уравнения:

$$2s-1+\rho^2(1-s) = r^4(1-s)+r^2\rho^2(2s-1)$$
$$1-s+r^2(2s-1) = \rho^2r^2(1-s)+\rho^4(2s-1)$$

Запишем их решения:

$$s = \frac{r^4-r^2\rho^2-\rho^2+1}{2-\rho^2+r^4-2r^2\rho^2}$$
$$s = \frac{r^2\rho^2-\rho^4+r^2-1}{2r^2-1+r^2\rho^2-2\rho^4}$$

Как и в предыдущем случае, приравняв два выражения, получим то же уравнение

$$r^6+\rho^6+1-3r^2\rho^2 = 0$$

Следовательно, если ABC не равносторонний, KML подобен ему только при $s = 0$ - то есть в тривиальном случае, когда они совпадают. Заметим в скобках, что до сих пор не было использовано условие, что $r \geq \rho$.

Перестановка 3 (MLK). Здесь при $s = 1$ треугольники становятся равными по построению. Этот случай, на самом деле, аналогичен предыдущему с точностью до зеркального отражения и оговоркой об отношении длин r и ρ, так что рассматривать его отдельно не будем.

Перестановка 4 (MKL). Эта и следующие перестановки не имеют очевидных решений, поэтому два уравнения для s, которые предстоит решать, ожидаются квадратными, то есть имеющими по крайней мере два решения каждое. При этом могут возникнуть три случая: все решения совпадают - тогда есть два подобных треугольника; совпадает только одно из каждой пары - тогда есть только один подобный треугольник; совпадений нет - тогда не существует подобных треугольников. При данной перестановке должны наблюдаться соотношения: $KM = rLM, KL = \rho LM$, то есть:

$$s(2s-1)+r^2(1-s)(1-2s)+\rho^2 s(1-s) = r^2(s(1-s)+r^2 s(2s-1)+\rho^2(1-s)(1-2s))$$
$$(1-s)(1-2s)+r^2 s(1-s)+\rho^2 s(2s-1) = \rho^2(s(1-s)+r^2 s(2s-1)+\rho^2(1-s)(1-2s))$$

Приведем эти выражения к трехчленам относительно s:

$$s^2(2-r^2-\rho^2)(1+2r^2) - s((2-r^2-\rho^2)r^2 + (1+2r^2)(1-\rho^2)) + r^2(1-\rho^2) = 0$$
$$s^2(2-r^2-\rho^2)(1+2\rho^2) - s((2-r^2-\rho^2)(1+\rho^2) + (1+2\rho^2)(1-\rho^2)) + 1 - \rho^4 = 0$$

Заметим, что при $r = \rho = 1$ эти выражения тоже превращаются в тождества. Видно, что оба уравнения можно переписать в общем виде (где символами $\lambda, \mu, \tau, \sigma$ обозначены какие-то комбинации r, ρ):

$$s^2\lambda\mu - s(\tau\mu + \sigma\lambda) + \sigma\tau = 0$$

Решая это уравнение, получаем два решения, $s_1 = \frac{\tau}{\lambda}, s_2 = \frac{\sigma}{\lambda}$.

Возвращаясь к нашим уравнениям, получаем, что первое имеет решения

$$s_1 = \tfrac{1-\rho^2}{2-r^2-\rho^2}, s_2^I = \tfrac{r^2}{1+2r^2}$$

а второе -

$$s_1 = \tfrac{1-\rho^2}{2-r^2-\rho^2}, s_2^{II} = \tfrac{1+\rho^2}{1+2\rho^2}$$

Как видно, первые точно совпадают, что соответствует некому подобному треугольнику, а вторые, в общем случае, не совпадают.

Поскольку мы выбрали условия так, что $1 \geq \rho$, то, обозначив $\alpha = 1-r^2 \geq 0, \beta = 1-\rho^2 \geq 0$, получаем, что $s_1 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, то есть s_1 положительно и меньше единицы (кроме случая равностороннего треугольника, тогда s_1 неопределено), следовательно, подобный треугольник всегда существует для любого исходного. Заметим, что при $r = \rho$ (равнобедренный треугольник ABC) мы получим $s = 1/2$, то есть две перестановки объединились. Выясним, есть ли другой треугольник - он соответствует равенству $s_2^I = s_2^{II}$, или:

$$\frac{r^2+1}{r^2} = \frac{\rho^2}{1+\rho^2}$$

Оно эквивалентно условию $1 + r^2 + \rho^2 = 0$, но эта величина строго положительна. Следовательно, равенство не выполняется, и второго значения s не существует.

Перестановка 5 (LMK). В этом случае $LM = rKL, KM = \rho KL$:

$$s(1-s)+r^2s(2s-1)+\rho^2(1-s)(1-2s) = r^2((1-s)(1-2s)+r^2s(1-s)+\rho^2s(2s-1))$$
$$s(2s-1)+r^2(1-s)(1-2s)+\rho^2s(1-s) = \rho^2((1-s)(1-2s)+r^2s(1-s)+\rho^2s(2s-1))$$

Переписав в виде трехчленов относительно s:

$$s^2(r^2-1)(1+r^2-2\rho^2)-s((1+r^2-2\rho^2)\cdot(-1)+(r^2-1)(r^2-\rho^2))+(-1)\cdot(r^2-\rho^2) = 0$$
$$s^2(\rho^2+2)(1+r^2-2\rho^2)-s((1+r^2-2\rho^2)\cdot 1+(\rho^2+2)(r^2-\rho^2))+1\cdot(r^2-\rho^2) = 0$$

получаем квадратные уравнения того же вида, что и в предыдущем случае. Их решения, соответственно:

$$s_1 = \frac{r^2-\rho^2}{1+r^2-2\rho^2}, s_2^I = \frac{1}{1-r^2}$$

и

$$s_1 = \frac{r^2-\rho^2}{1+r^2-2\rho^2}, s_2^{II} = \frac{1}{2+\rho^2}$$

Как видно, одно решение совпадает для обоих уравнений, и для $1 > r > \rho$ оно находится в пределах $(0, 1)$. Равнобедренный ABC дает две возможности: при $r = 1$ мы получаем $s = 1/2$, а при $r = \rho$: $s = 0$, то есть случаи опять объединяются. Как и в предыдущем случае, равенство решений s_2 эквивалентно соотношению $1 + r^2 + \rho^2 = 0$, которое не выполняется.

Перестановка 6 (KLM). В этом случае $KL = rKM, LM = \rho KM$:

$$(1-s)(1-2s)+r^2s(1-s)+\rho^2s(2s-1) = r^2(s(2s-1)+r^2(1-s)(1-2s)+\rho^2s(1-s))$$
$$s(1-s)+r^2s(2s-1)+\rho^2(1-s)(1-2s) = \rho^2(s(2s-1)+r^2(1-s)(1-2s)+\rho^2s(1-s))$$

Заметим, что совершив замену $s \to (1-s), r \leftrightarrow \rho$, мы получим в точности выражения для предыдущего случая, поэтому решение тоже единственно, и записывается, как

$$1 - s = \frac{\rho^2-r^2}{1+\rho^2-2r^2}$$

Следовательно,

$$s = \frac{1-r^2}{1+\rho^2-2r^2}$$

Однако здесь есть принципиальное отличие: числитель этой дроби, очевидно, больше знаменателя: $1-r^2 \geq 1-r^2-(r^2-\rho^2)$, так что при положительном $1 + \rho^2 - 2r^2$ получаем $s > 1$, а при отрицательном - $s < 0$, следовательно, вершины K, L, M находятся на продолжениях сторон треугольника ABC.

Как и в ранее рассмотренных случаях, для равнобедренного треугольника ABC решения вырождаются в $s = 0$ при $r = 1$ и $s = 1/2$ при $r = \rho$, а для равностороннего - в неопределенность $s = 0/0$ (то есть, любое s). Особенным случаем является треугольник ABC, для которого выполняется $1 + \rho^2 = 2r^2$. Тогда возникает неопределенность вида $s = 1/\infty$, тогда действительного решения не существует.

Ответ. В равностороннем треугольника ABC для любого s производный треугольник будет подобно-вписанным. Для равнобедренного - есть только один подобно-вписанный треугольник, при $s = 1/2$.

Для разностороннего треугольника ABC (без ограничения общностей полагаем $AB > AC > BC$, если это не так, переобозначим вершины) существует три значения s таких, что треугольник KLM (при каком-то обходе вершин) будет подобен ABC:

$$s = \tfrac{1}{2}$$
$$s = \tfrac{AC^2 - BC^2}{AB^2 + AC^2 - 2BC^2}$$
$$s = \tfrac{BC^2 - AB^2}{AC^2 + BC^2 - 2AB^2}$$

Таким образом, для произвольного треугольника ABC существует ровно **три** подобно-вписанных треугольника.

Кроме того, если $AB^2 + BC^2 \neq 2AC^2$, существует треугольник KLM, соответствующий $s = \frac{AB^2 - AC^2}{BC^2 + AB^2 - 2AC^2} \notin (0, 1)$, который подобен ABC (именно в такой записи). При этом вершины KLM, лежат на продолжениях сторон ABC, так что $ABC \subset KLM$ - в обобщенном смысле он удовлетворяет условию задачи, но не вписанный. Такой треугольник можно, условно, назвать "внешне-подобным".
В особом случае, когда $AB^2 + BC^2 = 2AC^2$ (при фиксированных A, B ГМТ вершин C - дуга окружности с центром в точке, симметричной B относительно A и с радиусом $\sqrt{3}AB$), подобно-вписанные треугольники соответствуют значениям $s \in \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\}$, а вершины "внешне-подобного"треугольника оказываются на бесконечности.