ММ 259 (5 баллов)

Ответ: а) да, б) да, в) нет

Решение: Введем декартовы координаты так, чтобы вершины треугольника имели координаты $A(-1,0), B(1,0), C(x,y)$. Без ограничения общности считаем, что точка C лежит в верхней части плоскости и $AB \leq BC \leq AC$. Тогда $x \geq 0, y > 0, (x-1)^2 + y^2 \geq 4$.

Вычисляем длины сторон треугольника $AB = 2, BC = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}, BC = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$, площадь треугольника $S = y$, радиус вписанной окружности $r = \frac{S}{p} = \frac{2y}{2+\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}}$, радиус описанной окружности $R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S} = \frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}\sqrt{(x+1)^2+y^2}}{2y}$.

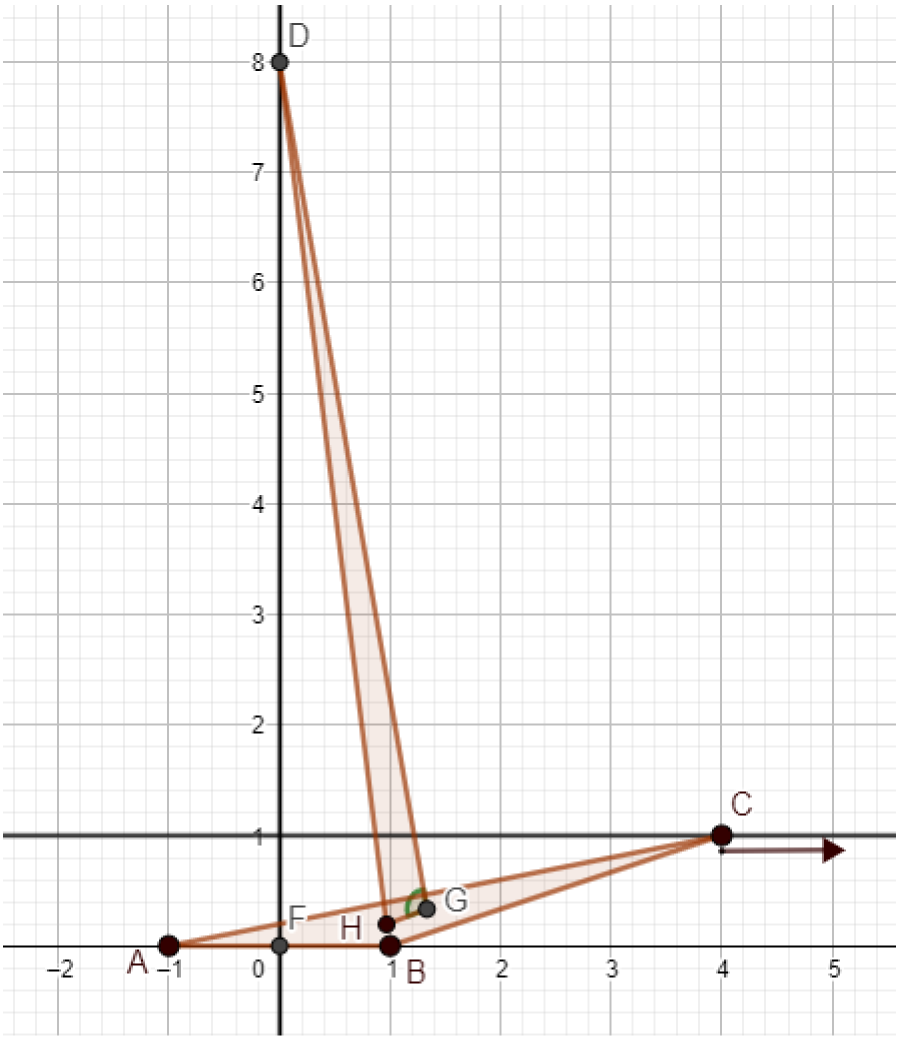
Далее, находим точку пересечения медиан $G(x_G, y_G)$, центр описанной окружности $D(x_D, y_D)$ и центр вписанной окружности $H(x_H, y_H)$ с координатами

$$x_G = \frac{x}{3}, y_G = \frac{y}{3}, x_D = 0, y_D = \frac{x^2 + y^2 - 1}{2y},$$

$$x_H = \frac{\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{2},$$

$$y_H = r = \frac{2y}{2 + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2}}$$

а) Вначале пусть точка C занимает положение (0,1), при котором треугольник ABC равнобедренный. Тогда три точки G, D, H лежат на высоте CF, и треугольник GDH вырождается в отрезок, а при положении близком к этому **площадь треугольника GDH бесконечно мала** по сравнению с площадью треугольника ABC. Далее, пусть точка C перемещается по прямой $y = 1$ так, чтобы $x \to +\infty$. Тогда площадь треугольника ABC остается постоянной и равна 1. При этом $x_G = \frac{x}{3} \to +\infty$, $y_D = \frac{x^2}{2} \to +\infty$, $x_H < 1$, $GH \sim \frac{x}{3}, GD \sim \frac{x^2}{2}, \angle DGH \to \frac{\pi}{2}$. Так что $S_{DGH} \sim \frac{x^3}{12} \to +\infty$, и площадь треугольника DGH при таком движении стремится к бесконечности.



При непрерывном изменении положения точки C площадь треугольника DGH изменяется непрерывным образом, поэтому в некотором положении станет равна 1. **И в этом положении, таким образом, треугольники ABC и DGH являются равновеликими.**

Дополнительно заметим, что это произойдет, когда координаты точки C станут (4,1).

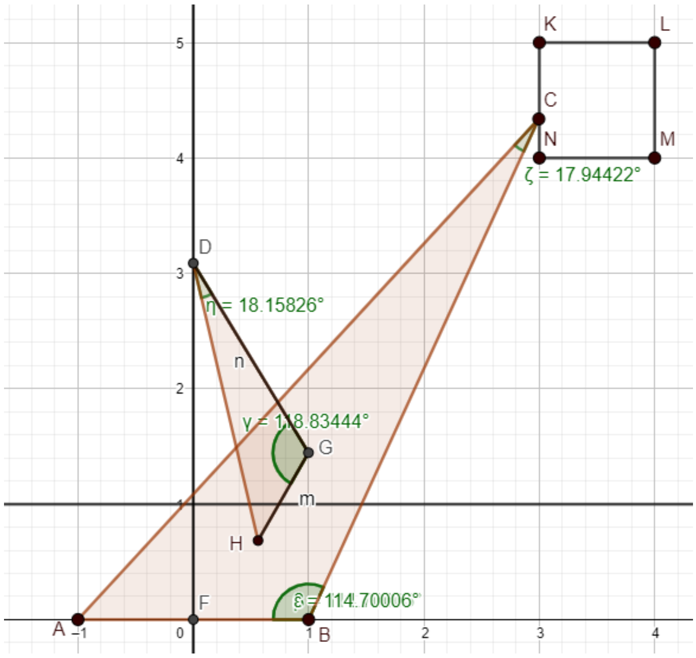
б) Для доказательства существования соответствующего треугольника мы воспользуемся теоремой об индексе векторного поля.

В квадрате с вершинами $K(3,5), L(4,5), M(4,4), N(3,4)$ рассмотрим векторное поле $F = (F_1, F_2)$, где

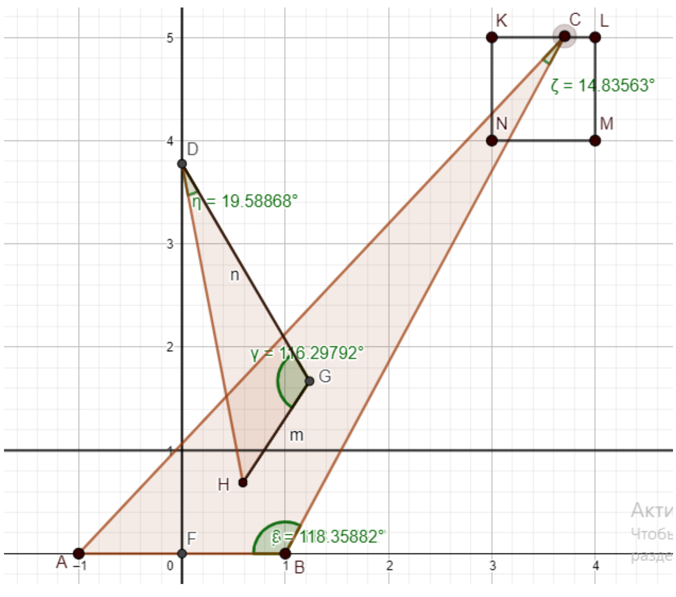
$$F_1 = F_1(x, y) = \angle ABC - \angle HGD$$

$$F_2 = F_2(x, y) = \angle ACB - \angle HDG$$

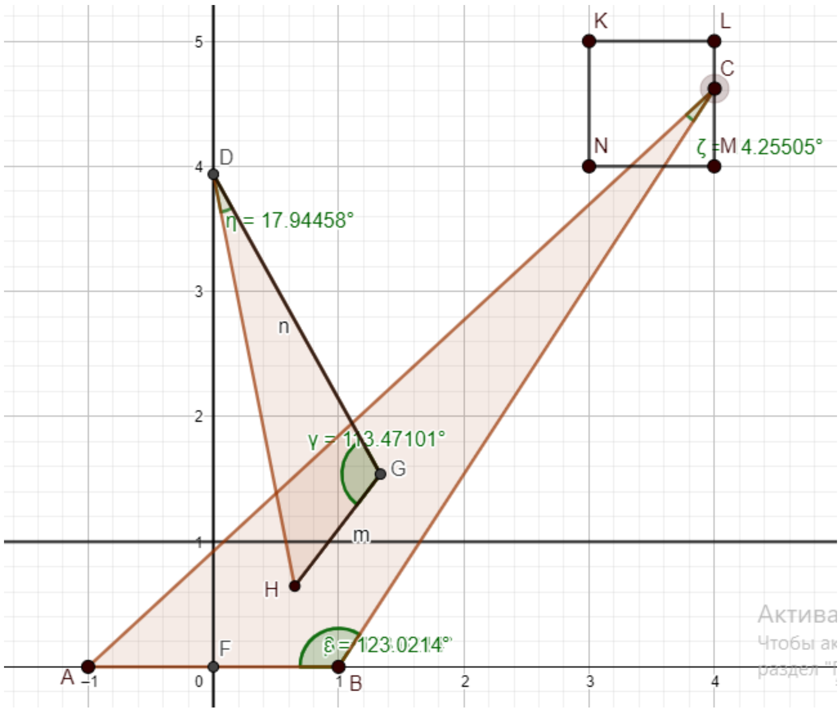
Анализ показывает, что для точки C вдоль отрезка KN: $F_1 < 0$



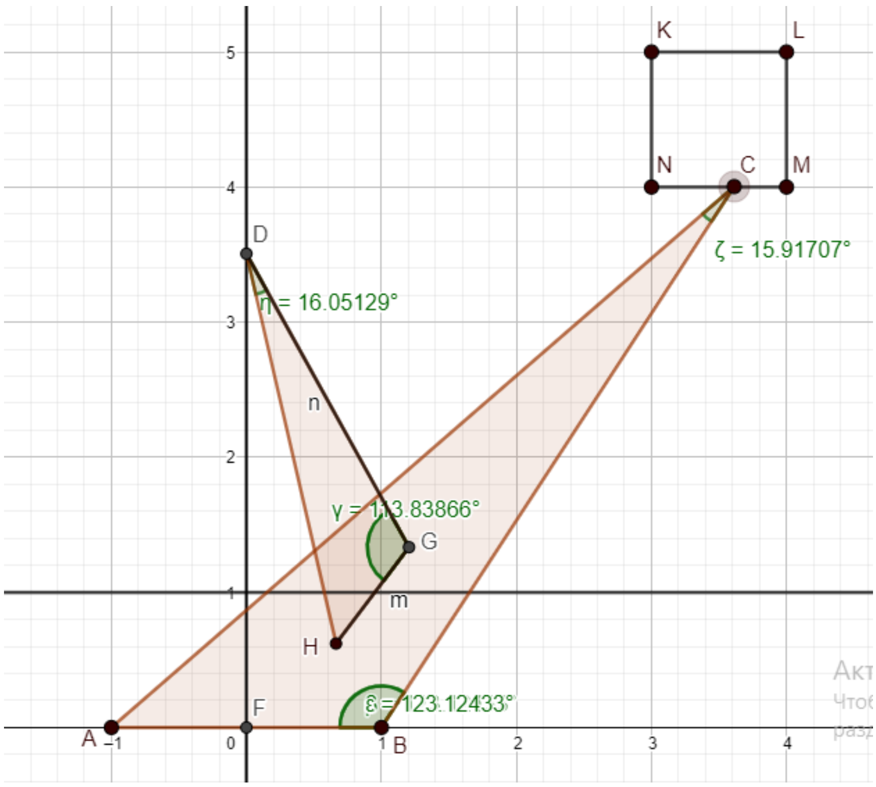
вдоль отрезка KL: $F_2 < 0$

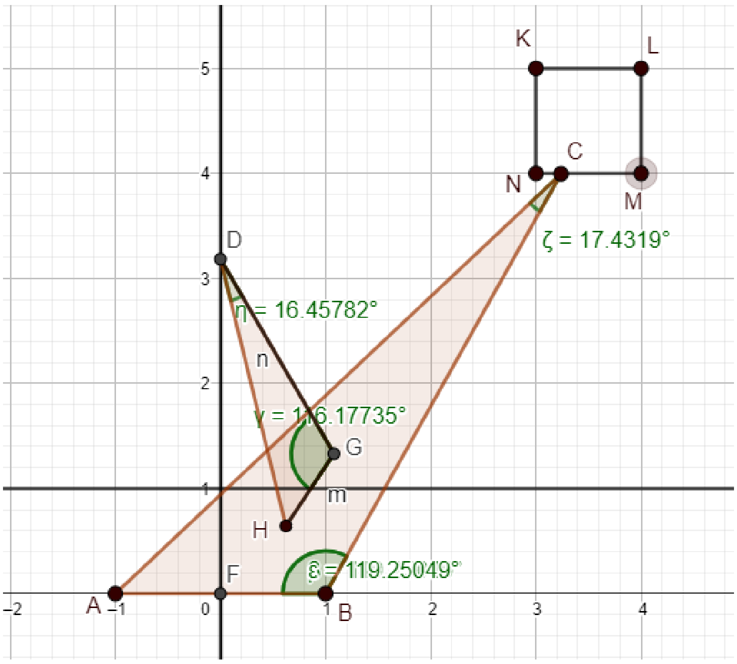


вдоль отрезка LM: $F_1 > 0$



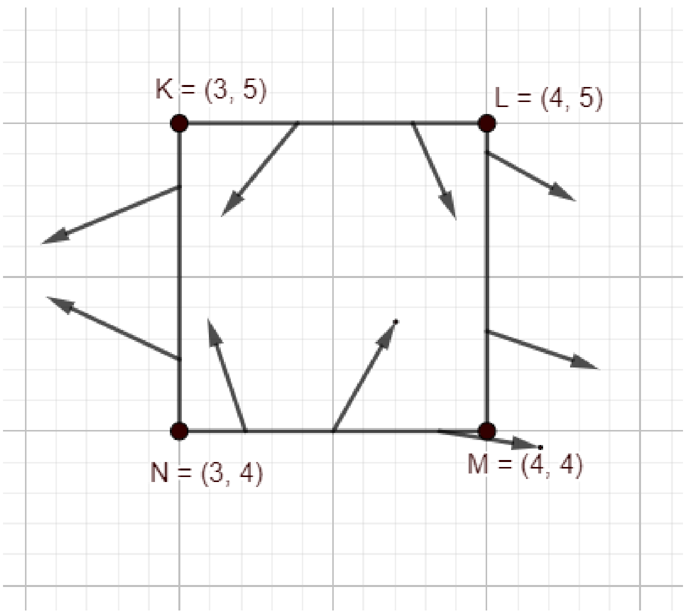
А двигая точку C вдоль отрезка MN, начиная с точки N , мы получаем сначала отрицательные, а потом положительные значения для F_2



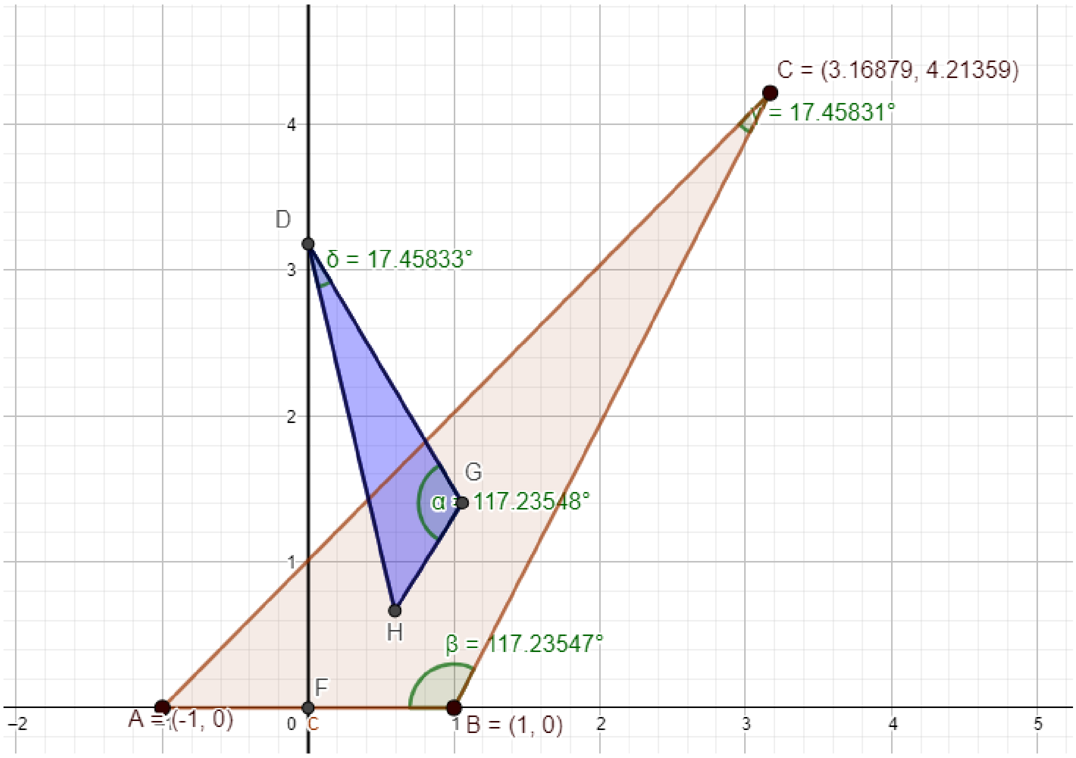


В результате вектор F при движении вдоль контура $KNMLK$, делает один оборот по часовой стрелке. Следовательно, индекс векторного поля F вдоль замкнутой кривой $KNMLK$ равен -1. Из соответствующей теоремы следует, что внутри контура существует особая точка векторного поля F, то есть такая, для которой $F_1 = \angle ABC - \angle HGD = 0\,, F_2 = \angle ACB - \angle HDG = 0$.

Из равенства $\angle ABC = \angle HGD, \angle ACB = \angle HDG$ по признаку подобия треугольников по двум углам следует, **что треугольники $\boldsymbol{ABC}$, $\boldsymbol{DGH}$ подобны.**



С помощью детального анализа **найден треугольник ABC, для которого треугольник DGH подобен ему.** Укажем координаты вершины C (3,1688,4,2136), и углы треугольника $\angle C = 17{,}4583^0$ $\angle B = 117{,}2355^0, \angle A = 45{,}3062^0$



в) Предположим, существует треугольник ABC равный соответствующему треугольнику DGH.

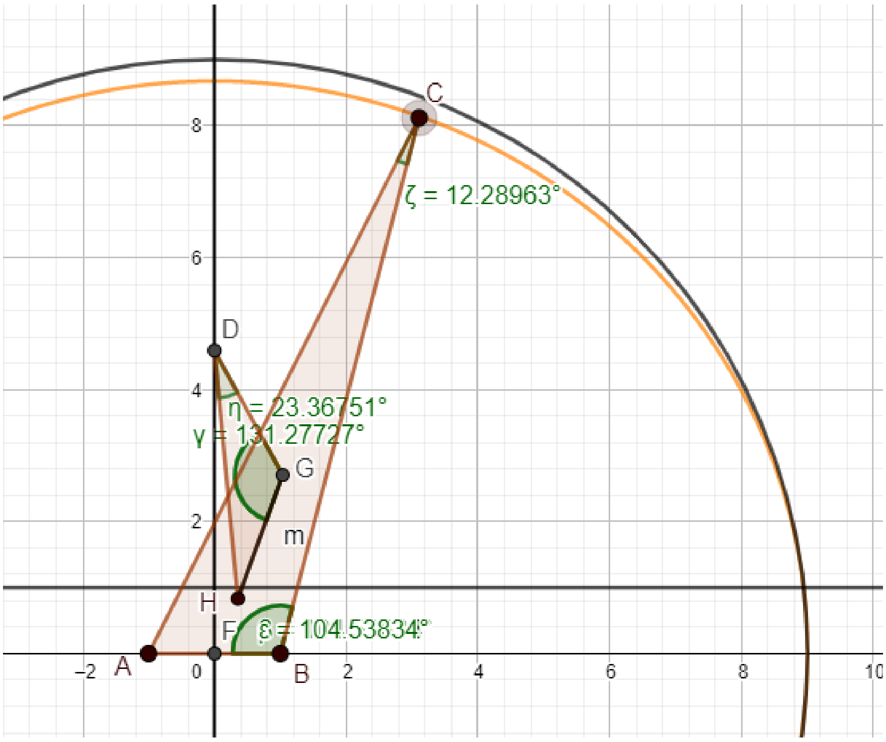
В остроугольном треугольнике все три точки G, D, H лежат строго внутри треугольника ABC, так что площадь треугольника DGH меньше площади треугольника ABC, и потому треугольники DGH и ABC не могут быть равны.

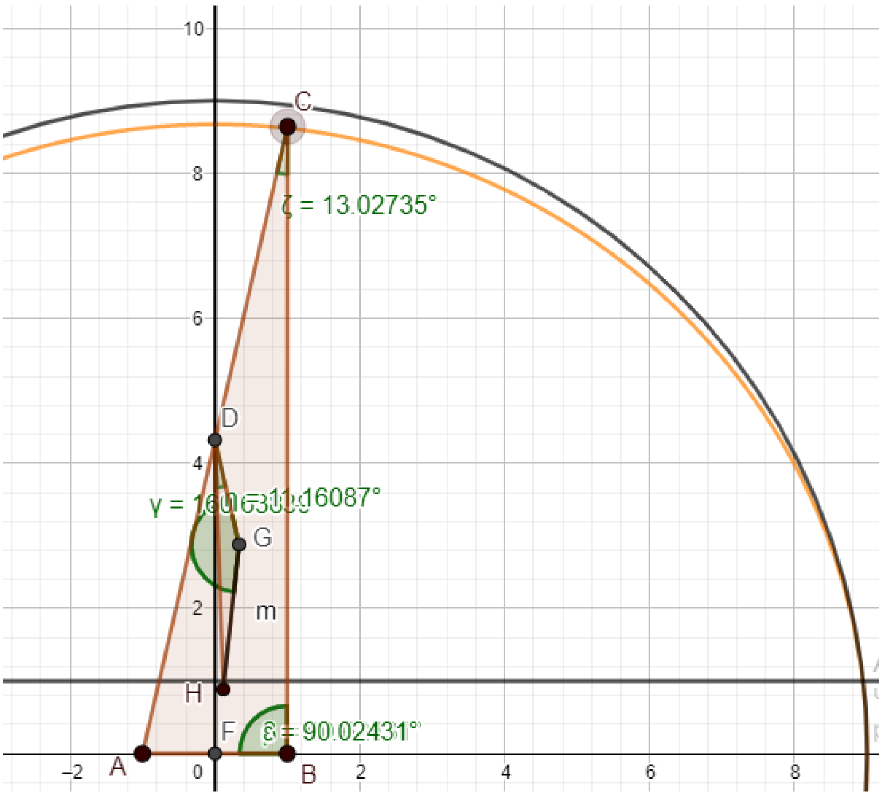
Значит, треугольник ABC тупоугольный. И в нашем случае самая длинная сторона AC, и тупой угол - при вершине B.

Тогда тупой угол в треугольнике DGH именно при вершине G.

1) Предположим $GH = 2$, тогда с учетом того, что $FH < 1$, получаем $FG \leq FH + HG < 3$. Значит, $FC < 9$ и точка C лежит внутри окружности с центром в точке $F(0{,}0)$ и радиусом 9. Множество точек C, для которых в

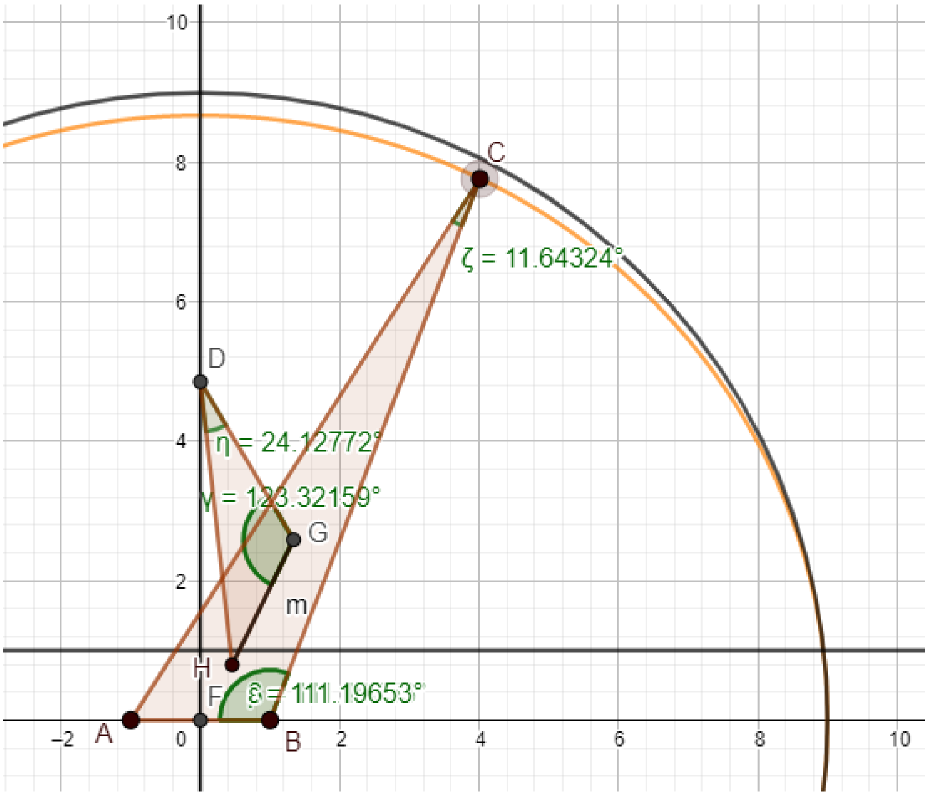
треугольнике ABC $GH = 2$, пробегают кривую на рисунке обозначенную оранжевым цветом



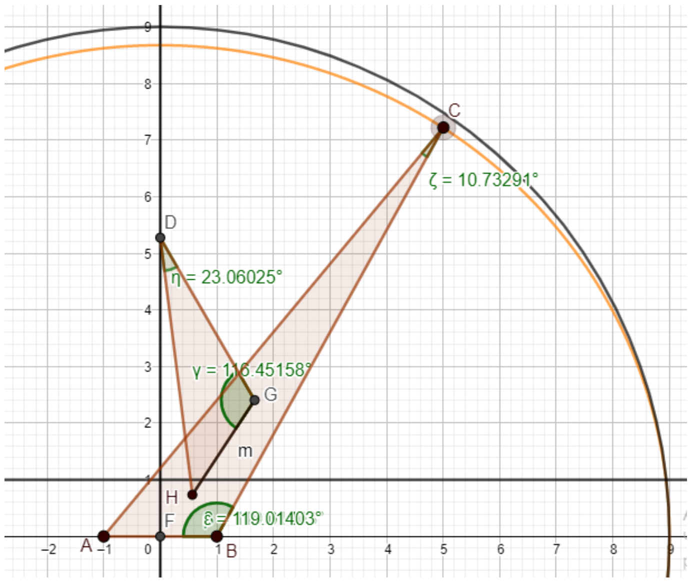


Рассмотрим такое движение точки C вдоль этой кривой, при котором x меняется в пределах от 0 до 9 и монотонно возрастает (нам достаточно взять диапазон от 1 до 9, но мы берем шире). В этом случае величина угла ABC монотонно возрастает в пределах от 90 до 180 градусов, а величина угла DGH также меняется в пределах от 90 до 180 градусов, но при этом монотонно убывает.

Зафиксируем положение точки C с абсциссой 4. Тогда $\angle ABC \approx 111^0 < \angle DGH \approx 123^0$



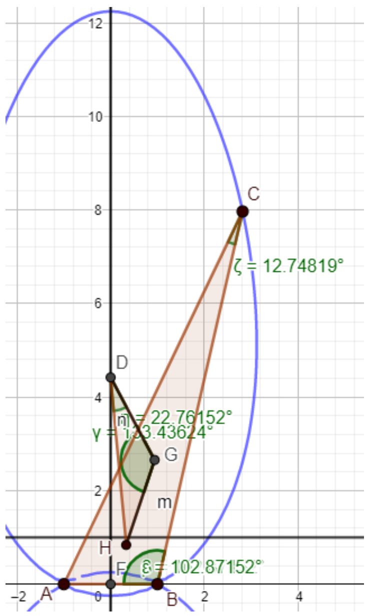
А затем положение точки C с абсциссой 5. Тогда $\angle ABC \approx 119^0 > \angle DGH \approx 116^0$



С учетом монотонного изменения этих углов найдется ровно одно положение точки С, при котором величины углов ABC и DGH совпадут, и абсцисса точки С при этом находится в пределах от 4 до 5.

Заметим, что при таком движении величина угла ACB монотонно убывает, а величина угла GDH монотонно возрастает. Но в пределах абсциссы точки С от 4 до 5 максимально возможное значение угла ACB не превосходит 12 градусов, а минимально возможное значение угла GDH не меньше 23 градусов. Следовательно, в таком диапазоне величины углов ACB и GDH не могут совпасть. Так что, в предположении равенства треугольников ACB и GDH стороне AB соответствует сторона, отличная от GH.

2) Предположим, $GD = 2$, и тогда $HG = BC \geq AB = 2$



Множество точек C, для которых в треугольнике ABC $GD = 2$, пробегают кривую на рисунке обозначенную синим цветом.

Заметим, что для точек данной кривой $x < 4$.

Пусть для точки $C(x, y)$: $y > 4$, тогда

$y_D = \frac{x^2+y^2-1}{2y} < \frac{16+y^2-1}{2y} = \frac{y}{2} + \frac{15}{2y} < \frac{y}{2} + \frac{15}{8} < \frac{y}{2} + 2 < \frac{y}{2} + \frac{y}{2} = y.$

Далее, $AC = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} > \sqrt{4 + y^2}$ и с учетом $x_H < 1, y_D < y$ получаем $HD < \sqrt{{x_H}^2 + {y_D}^2} < \sqrt{1 + y^2},$ и в результате $AC > HD$. В этом случае треугольники ACB и GDH не могут быть равными.

Пусть для точки $C(x, y)$: $y \leq 4$, тогда

$$GH = \sqrt{\left(x_H - x_G\right)^2 + \left(y_H - y_G\right)^2} < \sqrt{\max\left(x_H, x_G\right)^2 + max\left(y_H, y_G\right)^2}$$

А с учетом оценок $x_H, y_H < 1$ и $x_G = \frac{x}{3} < \frac{4}{3}, y_G = \frac{y}{3} < \frac{4}{3}$ получаем

$$GH < \sqrt{\frac{4}{3}^2 + \frac{4}{3}^2} = \frac{4\sqrt{2}}{3} < 2$$

Получили противоречие с условием $HG = BC \geq AB = 2$.

Таким образом, доказано, что **треугольники DGH и ABC не могут быть равными.**