Олимпиада «Покори Воробьевы Горы» —

— Второй заочный тур: тексты заданий с решениями

При решении задачи с выбором ответа участник должен выбрать один из пунктов A,B,C,D,E, содержащий правильный (по его мнению) вариант ответа, а если ни один из них не подходит или подходят сразу несколько, то выбрать пункт F.

1.1. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\sin 2\pi x = \sqrt{3}\sin \pi x$.

Решение. Данное уравнение равносильно

$$\sin\pi x(2\cos\pi x - \sqrt{3}) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \pi x = \pi n,\ n\in\mathbb{Z}, \\ \pi x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = n,\ n\in\mathbb{Z}, \\ x = \pm\dfrac{1}{6} + 2k,\ k\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Следовательно, наибольший отрицательный корень уравнения равен $-\dfrac{1}{6}$.

Ответ: $-\dfrac{1}{6}$. (E) □

A -1 **B** $-\dfrac{5}{6}$ **C** $-\dfrac{2}{3}$ **D** $-\dfrac{1}{3}$ **E** $-\dfrac{1}{6}$ **F**

1.2. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\sin\pi x = -\sqrt{3}\cos\frac{\pi x}{2}$.

Решение. Корнями уравнения являются следующие серии значений: $x = 1 + 2n$, $x = -\dfrac{2}{3} + 4n$, $x = -\dfrac{4}{3} + 4n$, $n\in\mathbb{Z}$. Следовательно, наибольший отрицательный корень уравнения равен $-\dfrac{2}{3}$.

Ответ: $-\dfrac{2}{3}$. (D) □

A $-\dfrac{4}{3}$ **B** -1 **C** $-\dfrac{5}{6}$ **D** $-\dfrac{2}{3}$ **E** $-\dfrac{1}{6}$ **F**

1.3. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\sin\pi x = -\sqrt{2}\sin\frac{\pi x}{2}$.

Решение. Корнями уравнения являются следующие серии значений: $x = 2n$, $x = \pm\dfrac{3}{2} + 4n$, $n\in\mathbb{Z}$. Следовательно, наибольший отрицательный корень уравнения равен $-\dfrac{3}{2}$.

Ответ: $-\dfrac{3}{2}$. (C) □

A -2 **B** $-\dfrac{5}{2}$ **C** $-\dfrac{3}{2}$ **D** $-\dfrac{5}{6}$ **E** $-\dfrac{2}{3}$ **F**

1.4. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\sin 2\pi x = \sqrt{2}\cos\pi x$.

Решение. Корнями уравнения являются следующие серии значений: $x = \dfrac{1}{2} + n$, $x = \dfrac{1}{4} + 2n$, $x = \dfrac{3}{4} + 2n$, $n\in\mathbb{Z}$. Следовательно, наибольший отрицательный корень уравнения равен $-\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $-\dfrac{1}{2}$. (A) □

$\boxed{\textbf{A}}\ -\frac{1}{2}\quad \boxed{\textbf{B}}\ -1\quad \boxed{\textbf{C}}\ -\frac{5}{4}\quad \boxed{\textbf{D}}\ -\frac{3}{2}\quad \boxed{\textbf{E}}\ -\frac{5}{2}\quad \boxed{\textbf{F}}$

2.1. Дневная смена мастера длится на 10% дольше, чем смена ученика. Если бы ученик работал столько времени, сколько мастер, а мастер – столько, сколько ученик, они изготовили бы одинаковое количество деталей. На сколько процентов деталей в день делает мастер больше, чем ученик?

Решение. Положим $p = 10\%$. Пусть производительность ученика составляет a деталей в час, мастера – b деталей в час, дневная смена ученика длится n часов, а мастера – m часов. Тогда из условия следует:

$$m = n\left(1 + \frac{p}{100}\right), \quad \text{и} \quad ma = nb \Rightarrow n\left(1 + \frac{p}{100}\right)a = nb \Rightarrow b = \left(1 + \frac{p}{100}\right)a.$$

В день мастер делает на $bm - an = \frac{p}{100}\left(2 + \frac{p}{100}\right)an$ деталей больше, чем ученик, что в процентах от дневной выработки ученика составляет

$$\frac{p}{100}\left(2 + \frac{p}{100}\right)an \cdot \frac{100}{an} = p\left(2 + \frac{p}{100}\right).$$

Если $p = 10\%$, то $p\left(2 + \frac{p}{100}\right) = 21$.

Ответ: 21. (C) □

$\boxed{\textbf{A}}\ 10\quad \boxed{\textbf{B}}\ 20\quad \boxed{\textbf{C}}\ 21\quad \boxed{\textbf{D}}\ 25\quad \boxed{\textbf{E}}\ 32\quad \boxed{\textbf{F}}$

2.2. Дневная смена мастера длится на 20% дольше, чем смена ученика. Если бы ученик работал столько времени, сколько мастер, а мастер – столько, сколько ученик, они изготовили бы одинаковое количество деталей. На сколько процентов деталей в день делает мастер больше, чем ученик?

Решение. Если $p = 20\%$, то $p\left(2 + \frac{p}{100}\right) = 44$.

Ответ: 44. (E) □

$\boxed{\textbf{A}}\ 20\quad \boxed{\textbf{B}}\ 25\quad \boxed{\textbf{C}}\ 32\quad \boxed{\textbf{D}}\ 40\quad \boxed{\textbf{E}}\ 44\quad \boxed{\textbf{F}}$

2.3. Дневная смена мастера длится на 30% дольше, чем смена ученика. Если бы ученик работал столько времени, сколько мастер, а мастер – столько, сколько ученик, они изготовили бы одинаковое количество деталей. На сколько процентов деталей в день делает мастер больше, чем ученик?

Решение. Если $p = 30\%$, то $p\left(2 + \frac{p}{100}\right) = 69$.

Ответ: 69. (D) □

$\boxed{\textbf{A}}\ 30\quad \boxed{\textbf{B}}\ 44\quad \boxed{\textbf{C}}\ 60\quad \boxed{\textbf{D}}\ 69\quad \boxed{\textbf{E}}\ 75\quad \boxed{\textbf{F}}$

2.4. Дневная смена мастера длится на 40% дольше, чем смена ученика. Если бы ученик работал столько времени, сколько мастер, а мастер – столько, сколько ученик, они изготовили бы одинаковое количество деталей. На сколько процентов деталей в день делает мастер больше, чем ученик?

Решение. Если $p = 40\%$, то $p\left(2 + \frac{p}{100}\right) = 96$.

Ответ: 96. (D) $\square$

$\boxed{\textbf{A}}$ 40 $\boxed{\textbf{B}}$ 60 $\boxed{\textbf{C}}$ 80 $\boxed{\textbf{D}}$ 96 $\boxed{\textbf{E}}$ 115 $\boxed{\textbf{F}}$

3.1. Найдите сумму всех двузначных чисел, у каждого из которых сумма квадратов цифр на 37 больше произведения тех же цифр.

Решение. **1 способ**. Для двузначного числа $\overline{ab}$ условие означает, что

$$a^2 + b^2 - ab = 37. \tag{1}$$

Поскольку уравнение симметрично, т.е. с каждым решением (a, b) пара (b, a) – также решение, то без ограничения общности считаем, что $a \geqslant b$.

- Пусть $a \leqslant 6$. Тогда уравнение (1) решений не имеет, так как $b \leqslant a$ и $37 = a^2+b^2-ab = a^2+b(b-a) \leqslant a^2 \leqslant 36$.
- При $a = 7$ уравнение (1) принимает вид $b^2 - 7b + 12 = 0 \iff b = 3,\ b = 4$. Отсюда получаем решения 73, 74 и с учётом симметрии – 37, 47.
- При $a = 8$ и $a = 9$ уравнение (1) принимает соответственно вид $b^2 - 8b - 27 = 0$ и $b^2 - 9b - 44 = 0$. Оба уравнения не имеют целых решений.

Остаётся сложить все полученные числа: $73 + 74 + 37 + 47 = 231$.

2 способ. Другое решение данной задачи. Для двузначного числа $\overline{ab}$ условие означает, что

$$a^2 + b^2 - ab = 37 \iff (2a - b)^2 + 3b^2 = 148.$$

Тогда $b \leqslant 7$ и полный перебор вариантов

b	0	1	2	3	4	5	6	7
$3b^2$	0	3	12	27	48	75	108	147
$(2a-b)^2$	37	145	126	121	100	73	40	1

оставляет только три варианта:

$$\left[\begin{array}{l} b = 3 \\ 2a - b = \pm 11 \end{array}\right. \Rightarrow a = 7; \quad \left[\begin{array}{l} b = 4 \\ 2a - b = \pm 10 \end{array}\right. \Rightarrow a = 7; \quad \left[\begin{array}{l} b = 7 \\ 2a - b = \pm 1 \end{array}\right. \Rightarrow a = 3,\ a = 4.$$

Таким образом, это числа 37, 47, 73, 74. Их сумма равна 231.

Ответ: 231. (C) $\square$

$\boxed{\textbf{A}}$ 165 $\boxed{\textbf{B}}$ 198 $\boxed{\textbf{C}}$ 231 $\boxed{\textbf{D}}$ 264 $\boxed{\textbf{E}}$ 297 $\boxed{\textbf{F}}$

3.2. Найдите сумму всех двузначных чисел, у каждого из которых сумма квадратов цифр на 57 больше произведения тех же цифр.

Решение. Такими двузначными числами являются числа 18, 78, 81, 87. Их сумма равна 264.

Ответ: 264. (D) $\square$

$\boxed{\textbf{A}}$ 165 $\boxed{\textbf{B}}$ 198 $\boxed{\textbf{C}}$ 231 $\boxed{\textbf{D}}$ 264 $\boxed{\textbf{E}}$ 297 $\boxed{\textbf{F}}$

3.3. Найдите сумму всех двузначных чисел, у каждого из которых сумма квадратов цифр на 73 больше произведения тех же цифр.

Решение. Такими двузначными числами являются числа 19, 89, 91, 98. Их сумма равна 297.

Ответ: 297. (E) □

$\boxed{\textbf{A}}$ 165 $\boxed{\textbf{B}}$ 198 $\boxed{\textbf{C}}$ 231 $\boxed{\textbf{D}}$ 264 $\boxed{\textbf{E}}$ 297 $\boxed{\textbf{F}}$

3.4. Найдите сумму всех двузначных чисел, у каждого из которых сумма квадратов цифр на 31 больше произведения тех же цифр.

Решение. Такими двузначными числами являются числа 16, 56, 61, 65. Их сумма равна 198.

Ответ: 198. (B) □

$\boxed{\textbf{A}}$ 165 $\boxed{\textbf{B}}$ 198 $\boxed{\textbf{C}}$ 231 $\boxed{\textbf{D}}$ 264 $\boxed{\textbf{E}}$ 297 $\boxed{\textbf{F}}$

4.1. Отрезок, соединяющий боковые стороны трапеции и параллельный ее основаниям, равным 3 и 21, делит трапецию на две части равной площади. Найдите длину этого отрезка.

Решение. **1 способ**. Обозначим через $a = 3$ и $b = 21$ длины оснований трапеции. Если c — длина отрезка, параллельного основаниям, а h_1 и h_2 — части высоты трапеции, примыкающие к основаниям a и b соответственно, то, приравнивая площади, получим:

$$\frac{a+c}{2}h_1 = \frac{c+b}{2}h_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{2}(h_1+h_2) \iff \begin{cases} \dfrac{b+c}{a+c} = \dfrac{h_1}{h_2}, \\ \dfrac{2(b+c)}{a+b} = 1 + \dfrac{h_1}{h_2} \end{cases}$$

Откуда

$$\frac{2(b+c)}{a+b} = \frac{a+b+2c}{a+c}.$$

Окончательно получаем $2c^2 = a^2 + b^2$. Поэтому

$$c = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \sqrt{\frac{9+441}{2}} = 15.$$

2 способ. Пусть $ABCD$ – трапеция с основаниями $AD = a = 3$, $BC = b = 21$ (см. рис. 1). Пусть MN – отрезок, параллельный основаниям. Пусть F – точка пересечения прямых AB и CD, площадь треугольника BCF равна a^2S и $MN = x$. Тогда

- из подобия $MNF \sim BCF$ с коэффициентом $k_1 = x/a$ следует: $S_{MNF} = k_1^2 S_{BCF} = x^2S$;
- из подобия $ADF \sim BCF$ с коэффициентом $k_2 = b/a$ следует: $S_{ADF} = k_2^2 S_{BCF} = b^2S$.

Остаётся заметить, что

$$S_{AMND} = S_{MBCN} \Longrightarrow (x^2 - a^2)S = (b^2 - x^2)S \Longrightarrow 2x^2 = a^2 + b^2.$$

Откуда $x = \sqrt{(a^2+b^2)/2} = 15$.

Ответ: 15. (C)

□

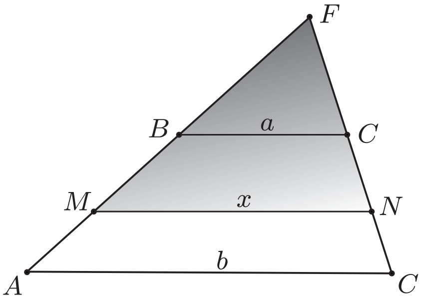

Рис. 1:

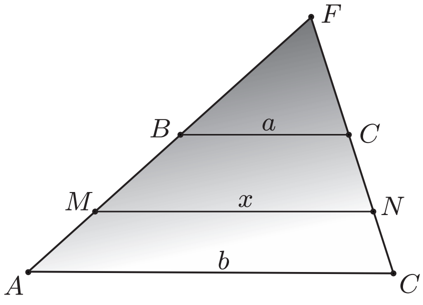

Рис. 2:

A 14 **B** 14,5 **C** 15 **D** 15,5 **E** 16 **F**

4.2. Отрезок, соединяющий боковые стороны трапеции и параллельный ее основаниям, равным 7 и 17, делит трапецию на две части равной площади. Найдите длину этого отрезка.

Решение. $c = \sqrt{(a^2 + b^2)/2} = \sqrt{(49 + 289)/2} = 13.$

Ответ: 13. (E) □

A 11 **B** 11,5 **C** 12 **D** 12,5 **E** 13 **F**

4.3. Отрезок, соединяющий боковые стороны трапеции и параллельный ее основаниям, равным 7 и 23, делит трапецию на две части равной площади. Найдите длину этого отрезка.

Решение. $c = \sqrt{(a^2 + b^2)/2} = \sqrt{(49 + 529)/2} = 17.$

Ответ: 17. (A) □

A 17 **B** 17,5 **C** 18 **D** 18,5 **E** 19 **F**

4.4. Отрезок, соединяющий боковые стороны трапеции и параллельный ее основаниям, равным 4 и 28, делит трапецию на две части равной площади. Найдите длину этого отрезка.

Решение. $c = \sqrt{(a^2 + b^2)/2} = \sqrt{(16 + 784)/2} = 20.$

Ответ: 20. (D) □

A 17 **B** 18 **C** 19 **D** 20 **E** 21 **F**

4.5. Отрезок, соединяющий боковые стороны трапеции и параллельный ее основаниям, равным 5 и 35, делит трапецию на две части равной площади. Найдите длину этого отрезка.

Решение. $c = \sqrt{(a^2 + b^2)/2} = \sqrt{(25 + 1225)/2} = 25.$

Ответ: 25. (D) □

$\boxed{\textbf{A}}$ 22 $\boxed{\textbf{B}}$ 23 $\boxed{\textbf{C}}$ 24 $\boxed{\textbf{D}}$ 25 $\boxed{\textbf{E}}$ 26 $\boxed{\textbf{F}}$

5.1. Найдите сумму всех целых значений аргумента x, при которых соответствующие значения функции

$$y = x^2 + x(\log_2 18 - \log_3 12) - \log_3 16 - 4\log_2 3$$

не превосходят 8.

Решение. Положим $a = \log_2 3$. Тогда условие задачи перейдет в неравенство

$$x^2 + 2\left(a - \frac{1}{a}\right)x - 4\left(a + \frac{1}{a} + 2\right) \leqslant 0.$$

Учитывая, что $a \in (\frac{3}{2}, 2)$, получим $x \in [-2a - 2, \dfrac{2}{a} + 2]$. Так как $-6 < -2a - 2 < -5$, $3 < \dfrac{2}{a} + 2 < 4$, то целыми решениями будут числа $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

Ответ: -9. (A) $\square$

$\boxed{\textbf{A}}$ -9 $\boxed{\textbf{B}}$ -4 $\boxed{\textbf{C}}$ 3 $\boxed{\textbf{D}}$ 6 $\boxed{\textbf{E}}$ 8 $\boxed{\textbf{F}}$

5.2. Найдите сумму всех целых значений аргумента x, при которых соответствующие значения функции

$$y = x^2 + x(\log_2 20 - \log_5 8) - \log_2 5 - 9\log_5 2$$

не превосходят 6.

Решение. Положим $a = \log_2 5$. Тогда условие задачи перейдет в неравенство

$$x^2 + \left(a - \frac{3}{a} + 2\right)x - \left(a + \frac{9}{a} + 6\right) \leqslant 0.$$

Учитывая, что $a \in (2, 3)$, получим $x \in [-a - 3, \dfrac{3}{a} + 1]$. Так как $-6 < -a - 3 < -5$, $2 < \dfrac{3}{a} + 1 < 3$, то целыми решениями будут числа $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$.

Ответ: -12. (C) $\square$

$\boxed{\textbf{A}}$ -20 $\boxed{\textbf{B}}$ -18 $\boxed{\textbf{C}}$ -12 $\boxed{\textbf{D}}$ -8 $\boxed{\textbf{E}}$ -2 $\boxed{\textbf{F}}$

5.3. Найдите сумму всех целых значений аргумента x, при которых соответствующие значения функции

$$y = x^2 + x(\log_2 36 - \log_3 16) - \log_2 9 - 4\log_3 8$$

не превосходят 11.

Решение. Положим $a = \log_2 3$. Тогда условие задачи перейдет в неравенство

$$x^2 + 2\left(a - \frac{2}{a} + 1\right)x - \left(2a + \frac{12}{a} + 11\right) \leqslant 0.$$

Учитывая, что $a \in (\frac{3}{2}, 2)$, получим $x \in [-2a - 3, \dfrac{4}{a} + 1]$. Так как $-7 < -2a - 3 < -6$, $3 < \dfrac{4}{a} + 1 < 4$, то целыми решениями будут числа $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

Ответ: -15. (B) $\square$

A -20 **B** -15 **C** -10 **D** -5 **E** 0 **F**

5.4. Найдите сумму всех целых значений аргумента x, при которых соответствующие значения функции

$$y = x^2 + x(\log_5 2 - \log_2 10) - \log_2 25 - 3\log_5 2$$

не превосходят 7.

Решение. Положим $a = \log_2 5$. Тогда условие задачи перейдет в неравенство

$$x^2 - \left(a - \frac{1}{a} + 1\right)x - \left(2a + \frac{3}{a} + 7\right) \leqslant 0.$$

Учитывая, что $a \in (2, 3)$, получим $x \in [-\frac{1}{a} - 2, a + 3]$. Так как $-3 < -\frac{1}{a} - 2 < -2$, $5 < a + 3 < 6$, то целыми решениями будут числа $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Ответ: 12. (D) □

A -12 **B** -4 **C** 6 **D** 12 **E** 20 **F**

6.1. Три пирата Джо, Билл и Том нашли клад, содержащий 70 одинаковых золотых монет, и хотят разделить их так, чтобы каждому из них досталось не менее 10 монет. Сколько существует способов это сделать?

Решение. Пусть клад состоит из $n = 70$ монет и каждому пирату должно достаться не менее $k = 10$ монет.

Выдадим каждому пирату по $k - 1$ монет, а оставшиеся $n - 3k + 3$ монеты выложим в ряд. Чтобы разделить оставшиеся монеты между пиратами, достаточно расположить на $n - 3k + 2$ местах между монетами два разделителя. Тем самым, Джо получит монеты левее первого разделителя, Билл – монеты между двумя разделителями, а Том – монеты правее второго разделителя. Число способов расположить эти два разделителя равно $C^2_{n-3k+2} = \dfrac{(n-3k+2)(n-3k+1)}{2}$.

Если $n = 70$, $k = 10$, то получится $C^2_{42} = 861$ способов.

Ответ: 861. □

6.2. Три пирата Джо, Билл и Том нашли клад, содержащий 80 одинаковых золотых монет, и хотят разделить их так, чтобы каждому из них досталось не менее 15 монет. Сколько существует способов это сделать?

Решение. Так как $n = 80$, $k = 15$, то получится $C^2_{37} = 666$ способов.

Ответ: 666. □

6.3. Три пирата Джо, Билл и Том нашли клад, содержащий 100 одинаковых золотых монет, и хотят разделить их так, чтобы каждому из них досталось не менее 25 монет. Сколько существует способов это сделать?

Решение. Так как $n = 100$, $k = 25$, то получится $C^2_{27} = 351$ способов.

Ответ: 351. □

6.4. Три пирата Джо, Билл и Том нашли клад, содержащий 110 одинаковых золотых монет, и хотят разделить их так, чтобы каждому из них досталось не менее 30 монет. Сколько существует способов это сделать?

Решение. Так как $n = 110$, $k = 30$, то получится $C_{22}^2 = 231$ способов.

Ответ: 231. $\square$

7.1. Найдите сумму цифр числа $\sqrt{\underbrace{111\ldots11}_{2014} - \underbrace{22\ldots2}_{1007}}$ (если оно не целое, то впишите в ответ 0).

Решение. Пусть $A = \underbrace{11\ldots1}_{1007}$. Тогда

$$\sqrt{\underbrace{111\ldots11}_{2014} - \underbrace{22\ldots2}_{1007}} = \sqrt{A \cdot 10^{1007} + A - 2A} = \sqrt{A(9A+1) - A} = 3A = \underbrace{33\ldots3}_{1007}.$$

Ответ: 3021. $\square$

7.2. Найдите сумму цифр числа $\sqrt{\underbrace{444\ldots44}_{2014} - \underbrace{88\ldots8}_{1007}}$ (если оно не целое, то впишите в ответ 0).

Решение. Число равно $\underbrace{66\ldots6}_{1007}$.

Ответ: 6042. $\square$

7.3. Найдите сумму цифр числа $\sqrt{\underbrace{111\ldots11}_{2012} - \underbrace{22\ldots2}_{1006}}$ (если оно не целое, то впишите в ответ 0).

Решение. Число равно $\underbrace{33\ldots3}_{1006}$.

Ответ: 3018. $\square$

7.4. Найдите сумму цифр числа $\sqrt{\underbrace{444\ldots44}_{2012} - \underbrace{88\ldots8}_{1006}}$ (если оно не целое, то впишите в ответ 0).

Решение. Число равно $\underbrace{66\ldots6}_{1006}$.

Ответ: 6036. $\square$

8.1. Укажите целое число, ближайшее к большему из корней уравнения

$$\operatorname{arctg}\left(\left(\frac{2x}{7} + \frac{7}{8x}\right)^2\right) - \operatorname{arctg}\left(\left(\frac{2x}{7} - \frac{7}{8x}\right)^2\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Решение. Пусть $y = \left(\frac{2x}{7} - \frac{7}{8x}\right)^2$, тогда $\left(\frac{2x}{7} + \frac{7}{8x}\right)^2 = y + 1$ и уравнение примет вид

$$\operatorname{arctg}(y+1) - \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{4}.$$

Так как $0 \leqslant \operatorname{arctg} y < \operatorname{arctg}(y+1) < \frac{\pi}{2}$, то последнее уравнение равносильно

$$\operatorname{tg}\bigl(\operatorname{arctg}(y+1) - \operatorname{arctg} y\bigr) = 1 \iff \frac{1}{1 + (y+1)y} = 1 \iff y = 0 \iff \frac{2x}{7} = \frac{7}{8x} \iff |x| = \frac{7}{4}.$$

Ответ: 2. $\square$

8.2. Укажите целое число, ближайшее к меньшему из корней уравнения

$$\operatorname{arctg}\left(\left(\frac{5x}{26}+\frac{13}{10x}\right)^2\right)-\operatorname{arctg}\left(\left(\frac{5x}{26}-\frac{13}{10x}\right)^2\right)=\frac{\pi}{4}.$$

Решение. Уравнение равносильно равенству $\dfrac{5x}{26}=\dfrac{13}{10x} \iff |x|=\dfrac{13}{5}$.

Ответ: -3. □

8.3. Укажите целое число, ближайшее к меньшему из корней уравнения

$$\operatorname{arctg}\left(\left(\frac{7x}{10}-\frac{5}{14x}\right)^2\right)-\operatorname{arctg}\left(\left(\frac{7x}{10}+\frac{5}{14x}\right)^2\right)=-\frac{\pi}{4}.$$

Решение. Уравнение равносильно равенству $\dfrac{7x}{10}=\dfrac{5}{14x} \iff |x|=\dfrac{5}{7}$.

Ответ: -1. □

8.4. Укажите целое число, ближайшее к большему из корней уравнения

$$\operatorname{arctg}\left(\left(\frac{3x}{22}-\frac{11}{6x}\right)^2\right)-\operatorname{arctg}\left(\left(\frac{3x}{22}+\frac{11}{6x}\right)^2\right)=-\frac{\pi}{4}.$$

Решение. Уравнение равносильно равенству $\dfrac{3x}{22}=\dfrac{11}{6x} \iff |x|=\dfrac{11}{3}$.

Ответ: 4. □

8.5. Укажите целое число, ближайшее к меньшему из корней уравнения

$$\operatorname{arcctg}\left(\left(\frac{2x}{7}+\frac{7}{8x}\right)^2\right)-\operatorname{arcctg}\left(\left(\frac{2x}{7}-\frac{7}{8x}\right)^2\right)=-\frac{\pi}{4}.$$

Решение. Уравнение равносильно равенству $\dfrac{2x}{7}=\dfrac{7}{8x} \iff |x|=\dfrac{7}{4}$.

Ответ: -2. □

8.6. Укажите целое число, ближайшее к большему из корней уравнения

$$\operatorname{arcctg}\left(\left(\frac{5x}{26}+\frac{13}{10x}\right)^2\right)-\operatorname{arcctg}\left(\left(\frac{5x}{26}-\frac{13}{10x}\right)^2\right)=-\frac{\pi}{4}.$$

Решение. Уравнение равносильно равенству $\dfrac{5x}{26}=\dfrac{13}{10x} \iff |x|=\dfrac{13}{5}$.

Ответ: 3. □

8.7. Укажите целое число, ближайшее к большему из корней уравнения

$$\operatorname{arcctg}\left(\left(\frac{7x}{10}-\frac{5}{14x}\right)^2\right)-\operatorname{arcctg}\left(\left(\frac{7x}{10}+\frac{5}{14x}\right)^2\right)=\frac{\pi}{4}.$$

Решение. Уравнение равносильно равенству $\frac{7x}{10} = \frac{5}{14x} \iff |x| = \frac{5}{7}$.

Ответ: 1. $\square$

8.8. Укажите целое число, ближайшее к меньшему из корней уравнения

$$\operatorname{arcctg}\left(\left(\frac{3x}{22} - \frac{11}{6x}\right)^2\right) - \operatorname{arcctg}\left(\left(\frac{3x}{22} + \frac{11}{6x}\right)^2\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Решение. Уравнение равносильно равенству $\frac{3x}{22} = \frac{11}{6x} \iff |x| = \frac{11}{3}$.

Ответ: -4. $\square$

9.1. В треугольной пирамиде $SABC$ ребра SB, AB перпендикулярны и $\angle ABC = 120^\circ$. Точка D на ребре AC такова, что отрезок SD перпендикулярен по меньшей мере двум медианам треугольника ABC и $CD = AB = 44\sqrt[3]{4}$. Найдите AD (если ответ окажется не целочисленным, округлите его до сотых).

Решение. Поскольку отрезок SD перпендикулярен двум медианам треугольника ABC, то он перпендикулярен плоскости (ABC) (см. рис. 3). В силу теоремы о трёх перпендикулярах отсюда следует, что $DB \perp AB$.

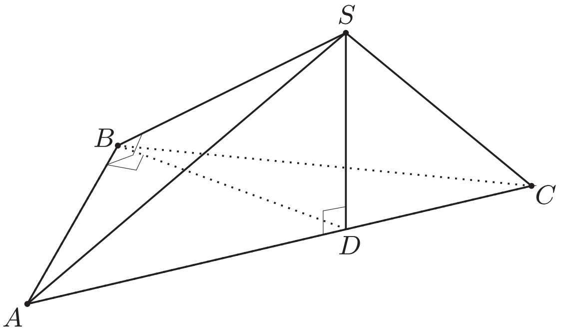

Рис. 3:

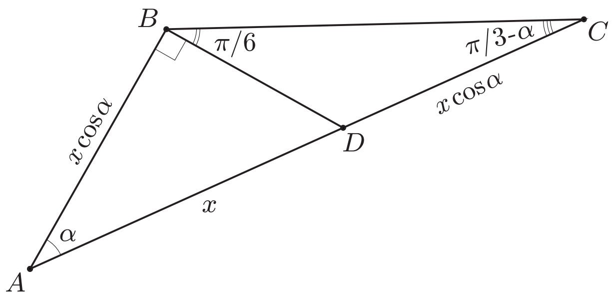

Рис. 4:

Пусть $\alpha = \angle BAC$, $x = AD$. Тогда, применяя теорему синусов в треугольнике ABC (см. рис. 4), имеем:

$$\frac{x\cos\alpha}{\sin(\pi/3 - \alpha)} = \frac{x + x\cos\alpha}{\sin(2\pi/3)} \iff \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}\cos^2\alpha}{1 + \cos\alpha} \iff (1 - \cos^2\alpha)(1 + \cos\alpha)^2 = 3\cos^4\alpha \iff$$
$$\iff 4\cos^4\alpha + 2\cos^3\alpha - 2\cos\alpha - 1 = 0 \iff (\cos 2\alpha + 1)(2\cos^3\alpha - 1) = 0.$$

Так как $\alpha < \pi/2$, то из последнего уравнения: $\cos\alpha = 1/\sqrt[3]{2}$. Следовательно, $AD = AB/\cos\alpha = 88$.

Ответ: 88. $\square$

9.2. В треугольной пирамиде $SABC$ ребра SB, AB перпендикулярны и $\angle ABC = 120°$. Точка D на ребре AC такова, что отрезок SD перпендикулярен по меньшей мере двум медианам треугольника ABC и $CD = AB = 52\sqrt[3]{4}$. Найдите AD (если ответ окажется не целочисленным, округлите его до сотых).

Ответ: 104.

9.3. В треугольной пирамиде $SABC$ ребра SB, AB перпендикулярны и $\angle ABC = 120°$. Точка D на ребре AC такова, что отрезок SD перпендикулярен по меньшей мере двум медианам треугольника ABC и $CD = AB = \dfrac{128}{\sqrt[3]{2}}$. Найдите AD (если ответ окажется не целочисленным, округлите его до сотых).

Ответ: 128.

9.4. В треугольной пирамиде $SABC$ ребра SB, AB перпендикулярны и $\angle ABC = 120°$. Точка D на ребре AC такова, что отрезок SD перпендикулярен по меньшей мере двум медианам треугольника ABC и $CD = AB = \dfrac{136}{\sqrt[3]{2}}$. Найдите AD (если ответ окажется не целочисленным, округлите его до сотых).

Ответ: 136.

10.1. Для функции $f(x) = 2013 - 8x^3 + 12x^2 - 14x - a - \sin 2\pi x$ найдите количество целых значений a, при каждом из которых уравнение

$$\underbrace{f(f(\ldots f}_{2013\text{ раз}}(x)\ldots)) = 2x - 1$$

на отрезке $[50; 51]$ имеет единственное решение.

Решение. Поскольку

$$2013 - 8x^3 + 12x^2 - 14x - a - \sin 2\pi x = 2008 - (2x-1)^3 - 4(2x-1) - a + \sin\pi(2x-1),$$

то после замены переменной $t = 2x - 1$ получим новую задачу: «для функции $F(t) = 2008 - t^3 - 4t - a + \sin\pi t$ найдите количество целых значений a, при каждом из которых уравнение

$$\underbrace{F(F(\ldots F}_{2013\text{ раза}}(t)\ldots)) = t,$$

на отрезке $[99; 101]$ имеет единственное решение».

Функция $F(t) = 2008 - t^3 - 4t - a + \sin\pi t$ монотонно убывает на всей числовой прямой (в чем можно убедиться, как вычислив $F'(t)$, так и непосредственно используя определение монотонно убывающей функции). Поэтому

$$\underbrace{F(F(\ldots F}_{2013\text{ раза}}(t)\ldots)) = t \iff F(t) = t.$$

Функция $g(t) = t - F(t)$ является монотонно возрастающей. Следовательно, уравнение $g(t) = 0$ имеет единственное решение на $[99; 101]$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} g(101) \geqslant 0, \\ g(99) \leqslant 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 101 - 2008 + 101^3 + 404 + a \geqslant 0, \\ 99 - 2008 + 99^3 + 396 + a \leqslant 0. \end{cases}$$

Из полученных двухсторонних оценок для a следует, что количество целых значений a равно

$$g(101) - g(99) + 1 = 2 + 101^3 - 99^3 + 404 - 396 + 1 = 60013.$$

Ответ 60013. $\square$

10.2 Для функции $f(x) = 2013 - a + 12x^2 - \cos 2\pi x - 8x^3 - 16x$ найдите количество целых значений a, при каждом из которых уравнение

$$\underbrace{f(f(\ldots f}_{2013 \text{ раз}}(x)\ldots)) = 2x - 1$$

на отрезке $[50; 51]$ имеет единственное решение.

Решение. После замены $t = 2x - 1$ получим новую задачу для функции $F(t) = 2007 - t^3 - 5t - a + \cos \pi t$. Количество целых значений a равно

$$g(101) - g(99) + 1 = 2 + 101^3 - 99^3 + 505 - 495 + 1 = 60015, \quad \text{где } g(t) = t - F(t).$$

Ответ 60015. $\square$

10.3 Для функции $f(x) = 2013 + \sin 2\pi x - 8x^3 - 12x^2 - 18x - a$ найдите количество целых значений a, при каждом из которых уравнение

$$\underbrace{f(f(\ldots f}_{2013 \text{ раз}}(x)\ldots)) = 2x + 1$$

на отрезке $[49, 50]$ имеет единственное решение.

Решение. После замены $t = 2x + 1$ получим новую задачу для функции $F(t) = 2020 - t^3 - 6t - a - \sin \pi t$. Количество целых значений a равно

$$g(101) - g(99) + 1 = 2 + 101^3 - 99^3 + 606 - 594 + 1 = 60017, \quad \text{где } g(t) = t - F(t).$$

Ответ 60017. $\square$

10.4 Для функции $f(x) = 2013 - a + \cos 2\pi x - 12x^2 - 8x^3 - 20x$ найдите количество целых значений a, при каждом из которых уравнение

$$\underbrace{f(f(\ldots f}_{2013 \text{ раз}}(x)\ldots)) = 2x + 1$$

на отрезке $[49, 50]$ имеет единственное решение.

Решение. После замены $t = 2x + 1$ получим новую задачу для функции $F(t) = 2021 - t^3 - 7t - a - \cos \pi t$. Количество целых значений a равно

$$g(101) - g(99) + 1 = 2 + 101^3 - 99^3 + 707 - 693 + 1 = 60019, \quad \text{где } g(t) = t - F(t).$$

Ответ 60019. $\square$
