О. Б. Полубасов   02.12.2013 г.

========= ММ188 ==========

Когда трехмерный случай сложнее четырехмерного

ММ188 (9 баллов)

Решения принимаются, по крайней мере, до 5.12.13

1. Пусть M = {{a,b,c},{a,b,d},{a,c,d},{b,c,d}}. Подмножество множества M назовем хорошим, если существуют такие векторы a,b,c,d трехмерного евклидова пространства (не обязательно различные), что все тройки из данного подмножества образуют базис, а остальные не образуют. Сколько хороших подмножеств у M?
2. Тот же вопрос для случая, когда M - множество сочетаний множества {a,b,c,d,e} по 4, и четырехмерного пространства.
3. Тот же вопрос для случая, когда M - множество сочетаний множества {a,b,c,d,e} по 3, и трехмерного пространства.

==========================

1. Терминология

Задачу для k векторов в n-мерном пространстве назовём ***задачей (k, n)***. Ответ на вопрос задачи обозначим ***F(k, n)***.

Неупорядоченную n-ку векторов без повторений будем называть ***чёрной***, если она присутствует в подмножестве, и ***красной***, если отсутствует. Каждое подмножества множества M задаёт свою собственную ***раскраску*** n-ок. Раскраска называется ***правильной***, если подмножество хорошее. Говоря о свойствах раскрасок, будем подразумевать, что раскраска правильная.

Неупорядоченную m-ку векторов без повторений будем называть ***чёрной***, если она встречается хотя бы в одной чёрной n-ке, и ***красной*** в противном случае.

Если m-ка чёрная, то она участвует в построении хотя бы одного базиса, а значит, состоит из линейно независимых векторов, то есть, её ранг равен m.

Рангом rang(E) правильной раскраски E, имеющей чёрные n-ки, назовём максимальное из m, таких что в раскраске все m-ки чёрные. Раскраска, в которой нет чёрных n-ок, имеет особый статус. Никакого ранга ей приписывать не будем.

Обозначим через $\boldsymbol{F_{\{\}}(k, n)}$ число правильных раскрасок, не содержащих чёрных n-ок, через $\boldsymbol{F_r(k, n)}$ – число правильных раскрасок ранга r, $r = 0..n$. Перечисленные раскраски образуют разбиение всех правильных раскрасок, поэтому выполняется:

$$F(k, n) = F_{\{\}}(k, n) + \sum_{r=0}^{n} F_r(k, n), \tag{1}$$

2. Особые случаи правильных раскрасок

При $k = 0$ возникает философский вопрос: «существуют ли векторы?», поэтому выяснение значения $F(0, n)$ пока отложим. Также, в дальнейшем изложении будем считать, что $n \geq 1$.

Теорема 1.

Если чёрных n-ок нет, то раскраска правильная.

Доказательство.

Чтобы никакая n-ка не образовывала базис, достаточно положить все векторы равными нулю (а если $n = 1$, то даже необходимо).

Таким образом, для любых $k > 0, n > 0$: $F_{\{\}}(k, n) = 1$. (2)

Поэтому при $k > 0, n > 0$ вместо $F_{\{\}}(k, n)$ будем писать просто $F_{\{\}}$.

Если $k < n$, то множество M пусто. Так как единственное подмножество M – пустое – удовлетворяет условию задачи, то:

$F(k, n) = F_{\{\}} = 1, F_r(k, n) = 0, r = 0..n.$ (3)

При $k = n$, множество M состоит из одного элемента. Оба его подмножества хорошие, $F(n, n) = F_{\{\}} + F_n(n, n) = 2, F_r(n, n) = 0, r = 0..n\text{-}1.$ (4)

3. Конструктивное решение задачи *(k, k – 1)*

Теорема 2.

Пусть в правильной раскраске есть чёрные n-ки. Если m-ка $E = \{v_1,..,v_m\}$ красная (то есть, встречается только в красных n-ках), то $r \le rang\ E < m$, где r – ранг раскраски.

Доказательство.

Для $m = n$ утверждение теоремы выполняется.

Пусть утверждение верно для $m = N$, докажем его для $m = N – 1$.

Предположим, что $rang\ E = m$. По условию теоремы, существует чёрная n-ка $X = \{x_1,..,x_n\}$, $rang\ X = n$. Так как для каждого $i = 1..n$: $(m+1)$-ка EUx_i – красная, то, по индуктивному предположению, $rang\ EUx_i = m$, то есть, вектор x_i лежит в подпространстве E. Тогда все векторы $x_1..x_n$ лежат в одном подпространстве E размерности m, а значит, $rang\{x_1,..,x_n\} \le m$, и n-ка $\{x_1,..,x_n\}$ – красная. Противоречие.

Пусть $X = \{x_1,..,x_k\}$ – множество векторов, $n = k – 1$.

Тогда $M = \{Xi, i = 1..k\}$, где $X_i = X\backslash x_i = \overline{x_i}$ (дополнение до X). $|M| = k$.

Из векторов $x_1..x_n$ составим ортонормированный базис. Положим $x_k = \sum_{i=1}^{r} x_i$, $0 \le r \le n$.

Тогда ранг любой m-ки, содержащей $\{x_1,..,x_r,x_k\}$, равен $m – 1$, то есть, m-ка красная. Все остальные m-ки составлены из линейно независимых векторов, поэтому, по теореме 2, они чёрные. Так как все r-ки – чёрные, но существует красная $(r+1)$-ка $\{x_1,..,x_r,x_k\}$, то ранг раскраски равен r.

Количество способов выбрать $r+1$ вектор из k равно $C(k, r+1)$, так что

$F_r(k, k – 1) = C(k, r+1).$ (5)

По формуле (1): $F(k, k – 1) = F_{\{\}} + \sum_{r=0}^{k-1} C_k^{r+1} = 1 + 2^k – 1 = 2^k$.

Так как $|M(k, k\text{-}1)| = C(k, k\text{-}1) = k$, то M имеет всего 2^k раскрасок, то есть, для любого $k \ge 2$: при $n = k\text{-}1$ все 2^k раскрасок правильные.

4. Вычисление $F_n(k, n)$

Заметим, что при $k \geq n$, существует единственная раскраска, в которой все n-ки чёрные. Докажем, что эта раскраска правильная.

Пусть $n = 1$. Сделаем все векторы одинаковыми и ненулевыми.

Пусть $n \geq 2$. Из векторов $x_1..x_n$ составим ортонормированный базис, а остальные выберем линейно независимыми от любых n-1 уже выбранных векторов, например, положим: $x_j = \sum_{i=1}^{n} i^{j-n} x_i$, $j = n+1..k$.

Например, для k = 5, n = 3:

$a = \{1,0,0\}$, $b = \{0,1,0\}$, $c = \{0,0,1\}$, $d = \{1,1,1\}$, $e = \{1.2.4\}$.

Таким образом, для любых $k \geq n$: $F_n(k, n) = 1$. (6)

5. Вычисление $F_0(k, n)$

Пусть правильная раскраска ранга 0 содержит k–s красных векторов, $n \leq s \leq k$–1. По теореме 2, эти векторы равны нулю. После исключения этих векторов задача (k, n) превращается в задачу (s, n), но уже без красных векторов. Поэтому число правильных раскрасок ранга 0 можно подсчитать по формуле:

$$F_0(k, n) = \sum_{s=n}^{k-1} C_k^s \sum_{r=1}^{n} F_r(s, n). \qquad (7)$$

Для рассматриваемой задачи формула (7) удобнее формулы включения-исключения.

6. Решение задачи $(k, 1)$

Из пунктов 4 и 5 сразу следует, что

$F(k, 1) = F_{\{\}} + F_0(k, 1) + F_1(k, 1) = 1 + \sum_{s=1}^{k-1} C_k^s + 1 = 2^k$.

Так как $|M(k,1)| = C(k,1) = k$, то M имеет всего 2^k раскрасок, то есть, для любого k: при $n = 1$ все 2^k раскрасок правильные.

Тот же результат легко получить и конструктивно, положив s векторов равными нулю, а остальные – одинаковыми и не нулевыми, но формула (7) играет важную роль в более сложных случаях.

Бросается в глаза двойственность между задачами $(k, 1)$ и $(k, k - 1)$.

7. Вычисление $F_1(k, n)$

Пусть в правильной раскраске ранга 1 есть красные двойки векторов. По теореме 2, ранг этих двоек равен 1.

Отношение «коллинеарны» ($rang\{v_1,v_2\} = 1$) на множестве ненулевых векторов симметрично и транзитивно, то есть, является отношением эквивалентности и задаёт разбиение множества векторов на классы. В правильной раскраске пары векторов из одного и того же класса должны быть красными, а пары векторов из разных классов – чёрными. Ранг каждого класса равен 1.

Так все векторы класса эквивалентны, то все правильные раскраски инвариантны относительно перестановок векторов класса.

Пусть раскраска содержит s классов, $n \leq s \leq k–1$. Оставив из каждого класса по одному представителю и исключив остальные векторы класса, сведём задачу *(k, n)* к задаче *(s, n)*, но уже без красных двоек. Поэтому число правильных раскрасок ранга 1 можно подсчитать по формуле:

$$F_1(k, n) = \sum_{s=n}^{k-1} S(k,s) \sum_{r=2}^{n} F_r(s,n), \tag{8}$$

где $S(k, s)$ – число Стирлинга второго рода, то есть, количество способов разбиения множества из k векторов на s непустых классов.

В частности, $F_1(k, 2) = B_k – 2$, где B_k – число Белла. (9)

8. Решение задачи *(4, 2)*

$F_0(4, 2) = \sum_{s=2}^{3} C_4^s \sum_{r=1}^{2} F_r(s,2)$ = 6 + 4*(3+1) = 22.
$F_1(4, 2) = \sum_{s=2}^{3} S(4,s)$ = 7 + 6 = 13.
$F(4, 2) = F_{\{\}} + F_0(4, 2) + F_1(4, 2) + F_2(4, 2)$ = 1 + 22 + 13 + 1 = 37.

9. Решение задачи *(5, 2)*

$F_0(5, 2) = \sum_{s=2}^{4} C_5^s \sum_{r=1}^{2} F_r(s,2)$ = 10 + 10*(3+1) + 5*(13+1) = 120.
$F_1(5, 2) = \sum_{s=2}^{4} S(5,s)$ = 15 + 25 + 10 = 50.
$F(5, 2) = F_{\{\}} + F_0(5, 2) + F_1(5, 2) + F_2(5, 2)$ = 1 + 120 + 50 + 1 = 172.

10. Решение задачи *(6, 2)*

$F_0(6, 2) = \sum_{s=2}^{5} C_6^s \sum_{r=1}^{2} F_r(s,2)$ = 15 + 20*(3+1) + 15*(13+1) + 6*(50+1) = 611.
$F_1(6, 2) = \sum_{s=2}^{5} S(6,s)$ = 31 + 90 + 65 + 15 = 201.
$F(6, 2) = F_{\{\}} + F_0(6, 2) + F_1(6, 2) + F_2(6, 2)$ = 1 + 611 + 201 + 1 = 814.

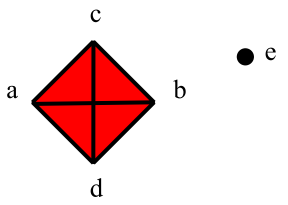
11. Решение задачи *(5, 3)*

$F_0(5, 3) = \sum_{s=3}^{4} C_5^s \sum_{r=1}^{3} F_r(s,3) = 10 + 5*(6+4+1) = 65$.
$F_1(5, 3) = \sum_{s=3}^{4} S(5,s) \sum_{r=2}^{3} F_r(s,3) = 25 + 10*(4+1) = 75$.

Подсчитаем $F_2(5, 3)$.

$M = \{\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,b,e\},\{a,c,d\},\{a,c,e\},\{a,d,e\},\{b,c,d\},\{b,c,e\},\{b,d,e\},\{c,d,e\}\}$.

Пусть в раскраске E тройки $\{a,b,c\}$ и $\{a,b,d\}$ – красные. Раз все векторы различны, то a, b, c и d компланарны. Следовательно, тройки $\{a,c,d\}$ и $\{b,c,d\}$ тоже красные. Тогда остальные тройки – чёрные (рис. 1). Раскрасок такого вида: $C(5,4) = 5$.

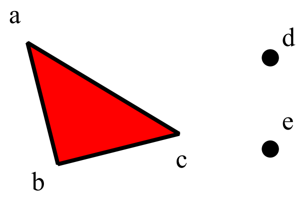


a = (1,0,0)
b = (0,1,0)
c = (1,1,0) = a + b
d = (1,2,0) = b + c
e = (0,0,1)

Рис. 1. E = *{{a,b,c},{a,b,d},{a,b,e},{a,c,d},{a,c,e},{a,d,e},{b,c,d},{b,c,e},{b,d,e},{c,d,e}}*.

Пусть теперь каждая пара векторов встречается не более чем в одной красной тройке. Тогда возможны два вида правильных раскрасок.

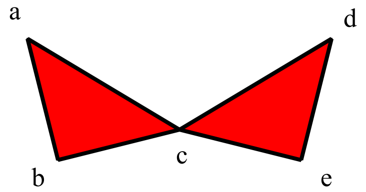
Вид 1. $C(5,3)$ = 10 раскрасок.



a = (1,0,0)
b = (0,1,0)
c = (1,1,0) = a + b
d = (0,0,1)
e = (1,2,1)

Рис. 2. E = *{{a,b,c},{a,b,d},{a,b,e},{a,c,d},{a,c,e},{a,d,e},{b,c,d},{b,c,e},{b,d,e},{c,d,e}}*.

Вид 2. $C(5,1)*C(4,2)/2$ = 15 раскрасок.



a = (1,0,0)
b = (0,1,0)
c = (1,1,0) = a + b
d = (0,0,1)
e = (1,1,1) = c + d

Рис. 3. E = *{{a,b,c},{a,b,d},{a,b,e},{a,c,d},{a,c,e},{a,d,e},{b,c,d},{b,c,e},{b,d,e},{c,d,e}}*.

Итого, $F_2(5, 3) = 5 + (10 + 15) = 30$.
$F(5, 3) = F_{\{\}} + F_0(5, 3) + F_1(5, 3) + F_2(5, 3) + F_3(5, 3) = 1+65+75+30+1 = 172$.

Ответ. $F(4, 3) = 16, F(5, 4) = 32, F(5, 3) = 172$.

12. Решение задачи *(6, 3)*

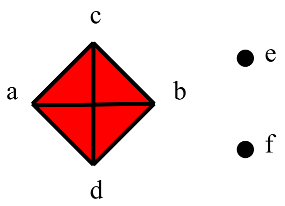
$F_0(6, 3) = \sum_{s=3}^{5} C_6^s \sum_{r=1}^{3} F_r(s,3) = 20 + 15*(6+4+1) + 6*(75+30+1) = 821$.
$F_1(6, 3) = \sum_{s=3}^{5} S(6,s) \sum_{r=2}^{3} F_r(s,3) = 90 + 65*(4+1) + 15*(30+1) = 880$.

Подсчитаем $F_2(6, 3)$.

M = *{{a,b,c},{a,b,d},{a,b,e},{a,b,f},{a,c,d},{a,c,e},{a,c,f},{a,d,e},{a,d,f},{a,e,f},{b,c,d},{b,c,e},{b,c,f},{b,d,e},{b,d,f},{b,e,f},{c,d,e},{c,d,f},{c,e,f},{d,e,f}}*.

Пусть в раскраске E тройки *{a,b,c}* и *{a,b,d}* – красные. Раз все векторы различны, то *a*, *b*, *c* и *d* компланарны. Следовательно, тройки *{a,c,d}* и *{b,c,d}* тоже красные. Тогда, либо вектор *e*, либо вектор *f* (рис. 6), либо оба не лежат в плоскости $\{a,b\}$. Если и e, и f не лежат в плоскости $\{a,b\}$, то они могут быть компланарны с одним (но не больше) из векторов a, b, c или d (рис. 5) или не быть ни с одним (рис. 4). То есть, возможны три вида правильных раскрасок.

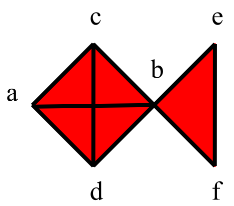
Вид 1. $C(6,4)$ = 15 раскрасок.



a = (1,0,0)
b = (0,1,0)
c = (1,1,0) = a + b
d = (1,2,0) = b + c
e = (0,0,1)
f = (1,3,1)

Рис. 4. E = {{a,b,c},{a,b,d},{a,b,e},{a,b,f},{a,c,d},{a,c,e},{a,c,f},{a,d,e},{a,d,f},{a,e,f}, {b,c,d},{b,c,e},{b,c,f},{b,d,e},{b,d,f},{b,e,f},{c,d,e},{c,d,f},{c,e,f},{d,e,f}}.

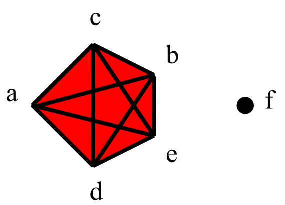
Вид 2. $C(6,4)*C(4,1)$ = 15*4 = 60 раскрасок.



a = (1,0,0)
b = (0,1,0)
c = (1,1,0) = a + b
d = (1,2,0) = b + c
e = (0,0,1)
f = (0,1,1) = b + e

Рис. 5. E = {{a,b,c},{a,b,d},{a,b,e},{a,b,f},{a,c,d},{a,c,e},{a,c,f},{a,d,e},{a,d,f},{a,e,f}, {b,c,d},{b,c,e},{b,c,f},{b,d,e},{b,d,f},{b,e,f},{c,d,e},{c,d,f},{c,e,f},{d,e,f}}.

Вид 3. $C(6,5)$ = 6 раскрасок.

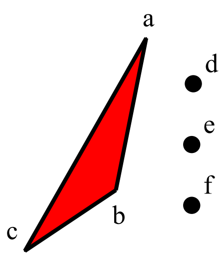


a = (1,0,0)
b = (0,1,0)
c = (1,1,0) = a + b
d = (1,2,0) = b + c
e = (1,3,0) = b + d
f = (0,0,1)

Рис. 6. E = {{a,b,c},{a,b,d},{a,b,e},{a,b,f},{a,c,d},{a,c,e},{a,c,f},{a,d,e},{a,d,f},{a,e,f}, {b,c,d},{b,c,e},{b,c,f},{b,d,e},{b,d,f},{b,e,f},{c,d,e},{c,d,f},{c,e,f},{d,e,f}}.

Пусть теперь каждая пара векторов встречается не более чем в одной красной тройке. Тогда возможны пять видов правильных раскрасок.

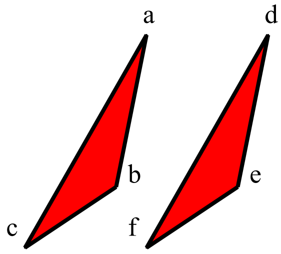
Вид 1. $C(6,3)$ = 20 раскрасок.



a = (1,0,0)
b = (0,1,0)
c = (1,1,0) = a + b
d = (0,0,1)
e = (1,2,4)
f = (1,3,9)

Рис. 7. E = {{a,b,c},{a,b,d},{a,b,e},{a,b,f},{a,c,d},{a,c,e},{a,c,f},{a,d,e},{a,d,f},{a,e,f}, {b,c,d},{b,c,e},{b,c,f},{b,d,e},{b,d,f},{b,e,f},{c,d,e},{c,d,f},{c,e,f},{d,e,f}}.

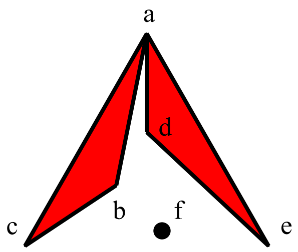
Вид 2. $C(6,3)/2$ = 10 раскрасок.



a = (1,0,0)
b = (0,1,0)
c = (1,1,0) = a + b
d = (0,0,1)
e = (1,2,3)
f = (1,2,4) = d + e

Рис. 8. E = {{a,b,c},{a,b,d},{a,b,e},{a,b,f},{a,c,d},{a,c,e},{a,c,f},{a,d,e},{a,d,f},{a,e,f}, {b,c,d},{b,c,e},{b,c,f},{b,d,e},{b,d,f},{b,e,f},{c,d,e},{c,d,f},{c,e,f},{d,e,f}}.

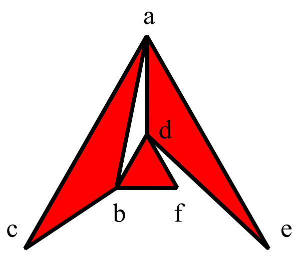
Вид 3. $C(6,1)*C(5,2)/2$ = 6*10 = 60 раскрасок.



a = (1,0,0)
b = (0,1,0)
c = (1,1,0) = a + b
d = (0,0,1)
e = (1,0,1) = a + d
f = (1,2,4)

Рис. 9. E = {{a,b,c},{a,b,d},{a,b,e},{a,b,f},{a,c,d},{a,c,e},{a,c,f},{a,d,e},{a,d,f},{a,e,f}, {b,c,d},{b,c,e},{b,c,f},{b,d,e},{b,d,f},{b,e,f},{c,d,e},{c,d,f},{c,e,f},{d,e,f}}.

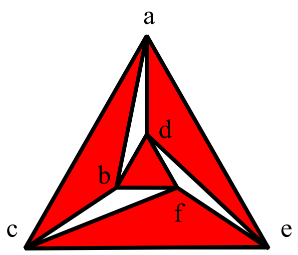
Вид 4. $C(6,3)*3!$ = 20*6 = 120 раскрасок.



a = (1,0,0)
b = (0,1,0)
c = (1,1,0) = a + b
d = (0,0,1)
e = (1,0,1) = a + d
f = (0,1,1) = b + d

Рис. 10. E = {{a,b,c},{a,b,d},{a,b,e},{a,b,f},{a,c,d},{a,c,e},{a,c,f},{a,d,e},{a,d,f},{a,e,f}, {b,c,d},{b,c,e},{b,c,f},{b,d,e},{b,d,f},{b,e,f},{c,d,e},{c,d,f},{c,e,f},{d,e,f}}.

Вид 5. $C(6,2)*2$ = 30 раскрасок. Красивая симметричная картинка.



a = (1,0,0)
b = (0,1,0)
c = (1,1,0) = a + b
d = (0,0,1)
e = (-1,0,1) = d – a
f = (0,1,1) = b + d
c + e = b + d = f

Рис. 11. E = {{a,b,c},{a,b,d},{a,b,e},{a,b,f},{a,c,d},{a,c,e},{a,c,f},{a,d,e},{a,d,f},{a,e,f}, {b,c,d},{b,c,e},{b,c,f},{b,d,e},{b,d,f},{b,e,f},{c,d,e},{c,d,f},{c,e,f},{d,e,f}}.

Итого, $F_2(6, 3)$ = (15+60+6) + (20+10+60+120+30) = 321.

$F(6, 3) = F_{\{\}} + F_0(6, 3) + F_1(6, 3) + F_2(6, 3) + F_3(6, 3)$ = 1+821+880+321+1 = 2024.

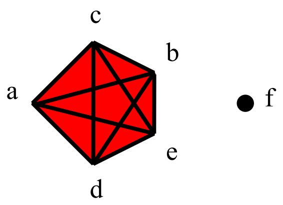
13. Решение задачи *(6, 4)*

$F_0(6, 4) = \sum_{s=4}^{5} C_6^s \sum_{r=1}^{4} F_r(s,4)$ = 15 + 6*(10+10+5+1) = 171.
$F_1(6, 4) = \sum_{s=4}^{5} S(6,s) \sum_{r=2}^{4} F_r(s,4)$ = 65 + 15*(10+5+1) = 305.

Подсчитаем $F_3(6, 4)$.

M = *{{a,b,c,d},{a,b,c,e},{a,b,c,f},{a,b,d,e},{a,b,d,f},{a,b,e,f},{a,c,d,e},*
{a,c,d,f},{a,c,e,f},{a,d,e,f},{b,c,d,e},{b,c,d,f},{b,c,e,f},{b,d,e,f},{c,d,e,f}}.

Пусть в раскраске *E* четвёрки *{a,b,c,d}* и *{a,b,c,e}* – красные. Раз все тройки векторов чёрные, то *a*, *b*, *c*, *d* и *e* лежат в одном подпространстве размерности 3. Следовательно, четвёрки *{a,b,d,e}*, *{a,c,d,e}* и *{b,c,d,e}* тоже красные. Тогда остальные четвёрки – чёрные. Раскрасок такого вида: *C(6,5)* = 6.

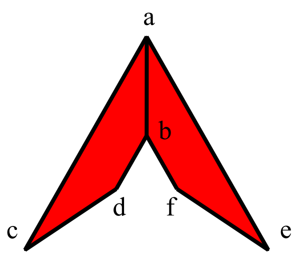


a = (1,0,0,0)
b = (0,1,0,0)
c = (0,0,1,0)
d = (1,1,1,0) = a + b + c
e = (1,2,4,0) = a + 2b + 4c
f = (0,0,0,1)

Рис. 12. *E* = *{{a,b,c,d},{a,b,c,e},{a,b,c,f},{a,b,d,e},{a,b,d,f},{a,b,e,f},{a,c,d,e},*
{a,c,d,f},{a,c,e,f},{a,d,e,f},{b,c,d,e},{b,c,d,f},{b,c,e,f},{b,d,e,f},{c,d,e,f}}.

Пусть теперь красные четвёрки не имеют общих троек векторов, но имеют общие двойки. Тогда возможны два вида правильных раскрасок.

Вид 1. *C(6,2)*C(4,2)/2* = 15*6/2 = 45 раскрасок.



a = (1,0,0,0)
b = (0,1,0,0)
c = (0,0,1,0)
d = (1,1,1,0) = a + b + c
e = (0,0,0,1)
f = (1,2,0,1) = a + 2b + e

Рис. 13. *E* = *{{a,b,c,d},{a,b,c,e},{a,b,c,f},{a,b,d,e},{a,b,d,f},{a,b,e,f},{a,c,d,e},*
{a,c,d,f},{a,c,e,f},{a,d,e,f},{b,c,d,e},{b,c,d,f},{b,c,e,f},{b,d,e,f},{c,d,e,f}}.

Вид 2. $C(6,2)*C(4,2)/6$ = 15*6/6 = 15 раскрасок.

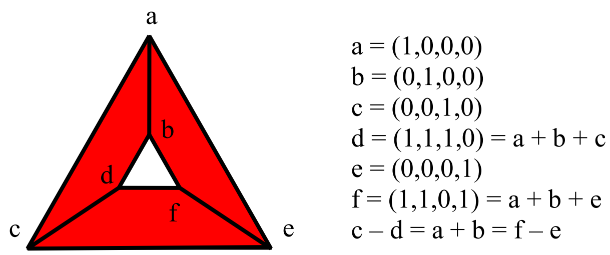


Рис. 14. E = {{a,b,c,d},{a,b,c,e},{a,b,c,f},{a,b,d,e},{a,b,d,f},{a,b,e,f},{a,c,d,e},
{a,c,d,f},{a,c,e,f},{a,d,e,f},{b,c,d,e},{b,c,d,f},{b,c,e,f},{b,d,e,f},{c,d,e,f}}.

Правильных раскрасок, в которых красные четвёрки не имеют общих двоек векторов, но имеют общие векторы, не существует.

Пусть красные четвёрки не имеют общих векторов. Тогда возможен только один вид правильных раскрасок. Раскрасок такого вида: $C(6,4)$ = 15.

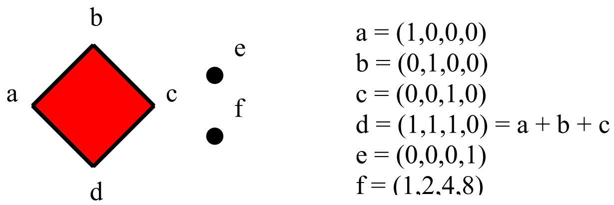


Рис. 15. E = {{a,b,c,d},{a,b,c,e},{a,b,c,f},{a,b,d,e},{a,b,d,f},{a,b,e,f},{a,c,d,e},
{a,c,d,f},{a,c,e,f},{a,d,e,f},{b,c,d,e},{b,c,d,f},{b,c,e,f},{b,d,e,f},{c,d,e,f}}.

Итого, $F_3(6, 4)$ = 6 + (45+15) + 15 = 81.

Подсчитаем $F_2(6, 4)$.

Каждый набор красных троек из задачи *(6, 3)* индуцирует какую-то раскраску четвёрок в задаче *(6, 4)*, но некоторые из них могут не оказаться правильными раскрасками ранга 2.

В отличие от красных векторов и красных двоек, для красных троек нам неизвестен способ редуцирования задачи, скажем, путём замены красных троек на базис соответствующей плоскости, поэтому кроме индуцированных четвёрок, необходимо рассмотреть возможность наличия и красных четвёрок, не содержащих красных троек.

Вид 1. $C(6,4)$ = 15 раскрасок.

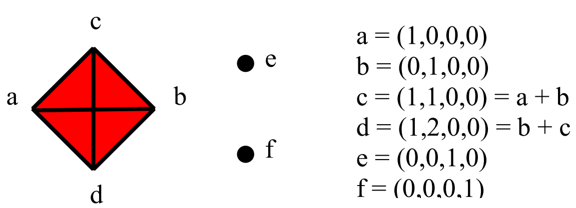
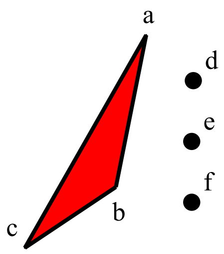


Рис. 16. E = {{a,b,c,d},{a,b,c,e},{a,b,c,f},{a,b,d,e},{a,b,d,f},{a,b,e,f},{a,c,d,e},
{a,c,d,f},{a,c,e,f},{a,d,e,f},{b,c,d,e},{b,c,d,f},{b,c,e,f},{b,d,e,f},{c,d,e,f}}.

Так как *a*, *b*, *c* и *d* лежат в одной плоскости, то вектор e всегда лежит с ними в одном трёхмерном пространстве. Тогда вектор *f* обязан лежать в другом трёхмерном пространстве, иначе все четвёрки будут красными.

Пусть теперь каждая пара векторов встречается не более чем в одной красной тройке. Тогда возможны пять видов правильных раскрасок.

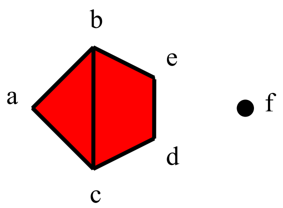
Вид 1. $C(6,3) = 20$ раскрасок.



a = (1,0,0,0)
b = (0,1,0,0)
c = (1,1,0,0) = a + b
d = (0,0,1,0)
e = (0,0,0,1)
f = (1,2,1,1)

Рис. 17. $E = \{\{a,b,c,d\},\{a,b,c,e\},\{a,b,c,f\},\{a,b,d,e\},\{a,b,d,f\},\{a,b,e,f\},\{a,c,d,e\},$
$\{a,c,d,f\},\{a,c,e,f\},\{a,d,e,f\},\{b,c,d,e\},\{b,c,d,f\},\{b,c,e,f\},\{b,d,e,f\},\{c,d,e,f\}\}.$

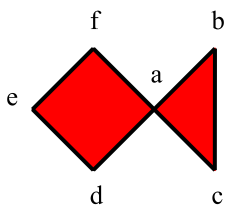
Вид 2. $C(6,5)*C(5,3) = 6*10 = 60$ раскрасок.



a = (1,0,0,0)
b = (0,1,0,0)
c = (1,1,0,0) = a + b
d = (0,0,1,0)
e = (1,2,1,0) = b + c + d
f = (0,0,0,1)

Рис. 18. $E = \{\{a,b,c,d\},\{a,b,c,e\},\{a,b,c,f\},\{a,b,d,e\},\{a,b,d,f\},\{a,b,e,f\},\{a,c,d,e\},$
$\{a,c,d,f\},\{a,c,e,f\},\{a,d,e,f\},\{b,c,d,e\},\{b,c,d,f\},\{b,c,e,f\},\{b,d,e,f\},\{c,d,e,f\}\}.$

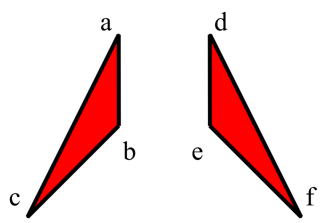
Вид 3. $C(6,1)*C(5,2) = 6*10 = 60$ раскрасок.



a = (1,0,0,0)
b = (0,1,0,0)
c = (1,1,0,0) = a + b
d = (0,0,1,0)
e = (0,0,0,1)
f = (1,0,1,1) = a + d + e

Рис. 19. $E = \{\{a,b,c,d\},\{a,b,c,e\},\{a,b,c,f\},\{a,b,d,e\},\{a,b,d,f\},\{a,b,e,f\},\{a,c,d,e\},$
$\{a,c,d,f\},\{a,c,e,f\},\{a,d,e,f\},\{b,c,d,e\},\{b,c,d,f\},\{b,c,e,f\},\{b,d,e,f\},\{c,d,e,f\}\}.$

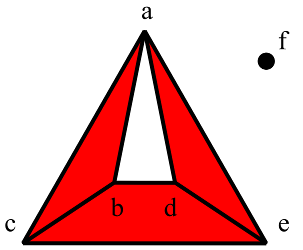
Вид 4. $C(6,3)/2 = 10$ раскрасок.



a = (1,0,0,0)
b = (0,1,0,0)
c = (1,1,0,0) = a + b
d = (0,0,1,0)
e = (0,0,0,1)
f = (0,0,1,1) = d + e

Рис. 20. $E = \{\{a,b,c,d\},\{a,b,c,e\},\{a,b,c,f\},\{a,b,d,e\},\{a,b,d,f\},\{a,b,e,f\},\{a,c,d,e\},$
$\{a,c,d,f\},\{a,c,e,f\},\{a,d,e,f\},\{b,c,d,e\},\{b,c,d,f\},\{b,c,e,f\},\{b,d,e,f\},\{c,d,e,f\}\}.$

Вид 5. $C(6,1)*C(5,2)/2$ = 6*10 = 60 раскрасок.



a = (1,0,0,0)
b = (0,1,0,0)
c = (1,1,0,0) = a + b
d = (0,0,1,0)
e = (1,0,1,0) = a + d
f = (0,0,0,1)
c – b = a = d – c

Рис. 21. $E = \{\{a,b,c,d\},\{a,b,c,e\},\{a,b,c,f\},\{a,b,d,e\},\{a,b,d,f\},\{a,b,e,f\},\{a,c,d,e\}, \{a,c,d,f\},\{a,c,e,f\},\{a,d,e,f\},\{b,c,d,e\},\{b,c,d,f\},\{b,c,e,f\},\{b,d,e,f\},\{c,d,e,f\}\}$.

Итого, $F_2(6, 4)$ = 15+20+60+60+10+60 = 225.

$F(6, 4) = F_{\{\}} + F_0(6, 4) + F_1(6, 4) + F_2(6, 4) + F_3(6, 4) + F_4(6, 4) =$ 1+171+305+225+81+1 = 784.

k\n	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0+0+1=1	0+0+0+1=1	0+0+0+0+1=1	0+0+0+0+0+1=1
1	**1+0+1=2**	1+0+0+0=1	1+0+0+0+0=1	1+0+0+0+0+0=1
2	1+2+1=4	**1+0+0+1=2**	1+0+0+0+0=1	1+0+0+0+0+0=1
3	1+6+1=8	1+3+3+1=8	**1+0+0+0+1=2**	1+0+0+0+0+0=1
4	1+14+1=16	1+22+13+1=37	1+4+6+4+1=16	**1+0+0+0+0+1=2**
5	1+30+1=32	1+120+50+1=172	1+65+75+30+1=172	1+5+10+10+5+1=32
6	1+62+1=64	1+611+201+1=814	1+821+880+321+1=2024	1+171+305+225+81+1=784

Таблица 1. $F_{\{\}}(k,n) + F_0(k,n) + \ldots + F_n(k, n) = F(k, n)$.