ММ184.

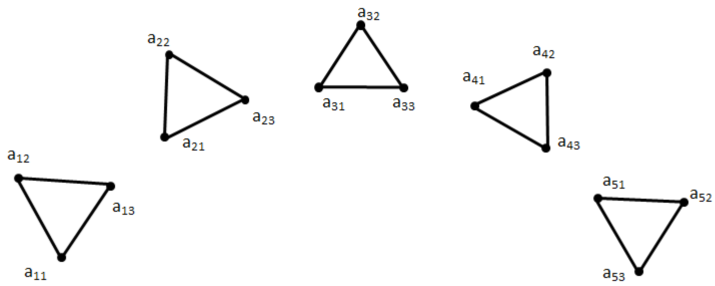
Компания из 30 отдыхающих собралась для 10-дневного рафтинга. Некоторые из туристов знакомы между собой. График дежурств (по три человека на каждый день, чтобы каждый отдежурил ровно один раз) составили с помощью жребия. Получилось, что в каждой тройке дежурных ровно двое знакомы между собой. Недовольный такой ситуацией командор предложил свой график, такой что в каждой тройке была ровно одна пара незнакомых. Этот график тоже не всем понравился. Покумекав, туристы смогли совместными усилиями составить такой график, что в каждой тройке дежурных все были знакомы между собой. Какое наименьшее и наибольшее число пар знакомых могло быть в данной группе?

Решение.

Решаем задачу для произвольного числа туристов $n = 3k$.

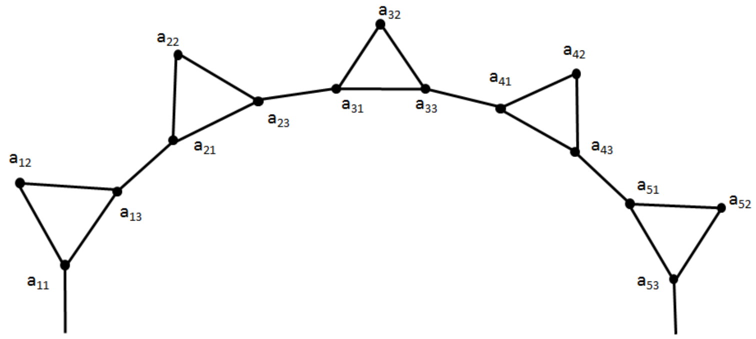
На графе каждому туристу соответствует вершина, а наличие/отсутсвие ребра между 2-мя вершинами означает знакомство/отсутствие знакомства между этими двумя людьми.

Сначала определим наименьшее возможное число пар знакомых. Так как есть график дежурств, составленный самими туристами, то граф можно разбить на k клик по 3 вершины, для удобства именуем вершины как на рисунке:



В этом графе пока $3k$ рёбер.

Граф легко разбить на тройки, которые получились с помощью жребия - ровно одно ребро. Но разбить на тройки так, как сделал командор не удастся - 3 вершины должны быть связаны в цепочку, но не замкнутую. При таком разбиении в каждой *тройке будет по 2 ребра, только одно из них можно выбрать из уже существующих, а ещё одно придётся создать, значит понадобится ещё как минимум k рёбер, сделать это можно, например, так:*



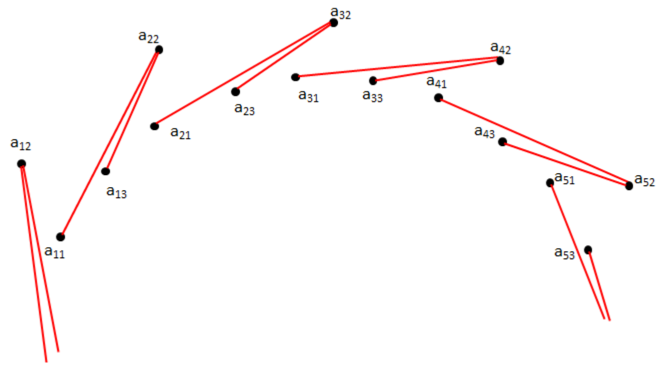
Разбиваем на тройки так:
1) жребий, в каждой тройке одно ребро:
$(a_{11}; a_{13}; a_{22})$, $(a_{21}; a_{23}; a_{32})$, $(a_{31}; a_{33}; a_{42})$, $(a_{41}; a_{43}; a_{52})$, ...
2) разбиение командора, в каждой тройке ровно два ребра:
$(a_{13}; a_{21}; a_{22})$, $(a_{23}; a_{31}; a_{32})$, $(a_{33}; a_{41}; a_{42})$, $(a_{43}; a_{51}; a_{52})$, ...
3) разбиение самих туристов, в каждой тройке все знакомы:
$(a_{11}; a_{12}; a_{13})$, $(a_{21}; a_{22}; a_{23})$, $(a_{31}; a_{32}; a_{33})$, $(a_{41}; a_{42}; a_{43})$, ...

Наименьшее число пар знакомых в группе из $n = 3k$ туристов равно $4k$.

Тогда для 30 туристов имеем 40 пар знакомых.

Находим наибольшее число пар знакомых, берём полный граф и удалим из него минимально необходимое число рёбер.

Так как есть разбиения графа на тройки, когда в каждой из них всего одно ребро, т.е. отсутствуют два ребра в каждой тройке или $2k$ рёбер. Это можно сделать, например, так - на рисунке изображён граф дополнений, т.е. рёбра на графе показывают отсутствие знакомства между соответствующими туристами.



Разбиения на тройки полностью сопадают с разбиениями в минимальном случае.

Находим число рёбер в графе, в полном графе с $n = 3k$ *вершинами* $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{3k(3k-1)}{2}$ *рёбер, тогда наибольшее число пар знакомых в группе* $\frac{3}{2}k\,(3k-1) - 2k$, *а для* 30 *туристов имеем* $\frac{3}{2} \cdot 10 \cdot (30-1) - 2 \cdot 10 = 415$.

Получаем, среди 30 *туристов при заданных условиия от* 40 *до* 415 *пар знакомых.*