Задача.

Дан многочлен $p(z) = z^3 + az + b$, где a, b, $c \in \mathbb{C}$.

1. Пусть $a = -i$, $b = 1 - i$. Найдите корни многочлена $p(z)$ и запишите их в алгебраической форме.

2. Найдите все пары (a, b), при которых один из корней многочлена $p(z)$ совпадает с серединой отрезка между двумя другими (здесь и далее мы отождествляем комплексные числа с точками плоскости).

3. Найдите все пары (a, b), при которых корни многочлена $p(z)$ лежат в вершинах равностороннего треугольника.

4. Докажите, что если $|p(z)| \leqslant 1$ при всех (z таких, что) $|z| = 1$, то $a = b = 0$.

Решение.

1. Можно было бы решить уравнение

$$p(z) = z^3 - iz + 1 - i = 0$$

по *формуле Кардано*, но это очень неприятно, да и зачем, когда один корень виден сразу: это $z = -1$. Разделив $p(z)$ на $z + 1$, получим квадратное уравнение

$$q(z) = z^2 - z + 1 - i = 0.$$

Решать квадратное уравнение гораздо приятнее, так как можно воспользоваться обычной школьной формулой. Но что такое?! И здесь корень тоже легко угадывается! Это $z = -i$. Да, не судьба нам попользоваться хоть какими-то формулами, все корни находятся не приходя в сознание. Вот последний: делим $q(z)$ на $z + i$, получаем линейное уравнение

$$z - 1 - i = 0,$$

откуда $z = 1 + i$.

Ответ. $\{-1, -i, 1 + i\}$.

Замечание. Если бы составитель задачи хотел, чтобы она решалась именно по формуле Кардано (а что, имеет право), мог бы так прямо в условии и написать. Но ведь не написал. Да и про формулу корней квадратного уравнения никаких указаний нет. Так что решаем как хотим.

2. Обозначим корни z_1, z_2, z_3. Пусть z_1 — это тот, который середина. Тогда

$$z_1 = \frac{z_2 + z_3}{2}. \qquad (*)$$

Кроме того, по *формулам Виета* имеем

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0, \qquad (**)$$

так как коэффициент при z^2 в $p(z)$ равен нулю. Из $(*)$ и $(**)$ следует, что $z_1 = 0$. Но тогда

$$0 = p(z_1) = 0^3 + a \cdot 0 + b = b,$$

т. е. $b = 0$. Легко убедиться, что при $b = 0$ и любом a корни многочлена

$$p(z) = z^3 + az = z(z^2 + a)$$

(а это суть число 0 и оба значения $\sqrt{-a}$, симметрично расположенные относительно нуля) удовлетворяют условию.

Ответ. $(a, 0)$, где a любое.

3. Пусть по-прежнему корни будут z_1, z_2, z_3. Они лежат в вершинах равностороннего (правильного, иными словами) треугольника, центр которого находится в точке

$$\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = 0.$$

Но тогда эти корни имеют вид $z_1 = t$, $z_2 = t\zeta$, $z_3 = t\zeta^2$, где $\zeta = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)$ — примитивный кубический корень из 1, а $t \neq 0$. Имеем

$$0 = t^3 + at + b, \quad 0 = t^3 + at\zeta + b, \quad 0 = t^3 + at\zeta^2 + b. \tag{†}$$

Сложим эти равенства: $0 = 3t^3 + at(1 + \zeta + \zeta^2) + 3b = 3t^3 + at \cdot 0 + 3b = 3t^3 + 3b$, т. е.

$$t^3 + b = 0.$$

Но тогда из первого равенства (†) следует $at = 0$, откуда $a = 0$.

Ответ. $(0, b)$, где $b \neq 0$ любое.

4. Рассмотрим многочлен

$$q(z) = \lambda^{-3} p(\lambda z) = z^3 + a_1 z + b_1,$$

где $a_1 = \lambda^{-2} a$, $b_1 = \lambda^{-3} b$, при этом $|\lambda| = 1$. Выберем λ так, чтобы свободный коэффициент b_1 оказался вещественным неотрицательным числом. Понятно, что $|q(z)| = |p(z)|$, поэтому далее можно рассуждать с $q(z)$ вместо $p(z)$. Имеем

$$q(1) + q(\zeta) + q(\zeta^2) = 3(1 + b_1), \quad \zeta = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$

откуда $3(1 + b_1) \leqslant 3M$, где

$$M = \max_{|z|=1} |q(z)|.$$

Значит, $M \geqslant 1$. Однако по условию $M \leqslant 1$. Таким образом, $M = 1$ и, как следствие, $b_1 = 0$. Теперь можно рассмотреть многочлен $r(z) = q(z)/z = z^2 + a_1$. Имеем

$$\max_{|z|=1} |z^2 + a_1| \leqslant 1,$$

что возможно только при $a_1 = 0$ (это очевидно из-за специфического вида $r(z)$).

Замечание. Утверждение легко обобщается на случай

$$p(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \quad \max_{|z|=1} |p(z)| \leqslant 1.$$

Доказательство проводим индукцией по n. Для шага индукции используем равенство

$$p(1) + p(\zeta) + \ldots + p(\zeta^{n-1}) = n(1 + a_0),$$

где $\zeta = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ — примитивный корень n-й степени из 1.