

Механическое доказательство теоремы об инцентрах

Н. Н. Осипов

СФУ (Красноярск)

e-mail: nnosipov@rambler.ru

В произвольном треугольнике провели биссектрисы и в каждый из шести образовавшихся треугольников вписали окружность. Теорема об инцентрах утверждает, что центры этих шести окружностей лежат на одной кривой второго порядка. В статье приводится вычислительное доказательство этой теоремы и её обобщения с использованием системы компьютерной алгебры *Maple*. Для эффективной реализации вычислений применяется алгебра комплексных чисел.

Ключевые слова: Комплексные числа, системы компьютерной алгебры, механическое доказательство геометрических теорем

Введение

В недавней статье [1] был приведён целый ряд сходных между собой геометрических гипотез, которые, вероятно, родились в результате экспериментов с какой-нибудь *системой динамической геометрии* типа *GeoGebra* [2]. Настоящая статья посвящена доказательству одной из этих гипотез, которую мы будем называть *гипотезой об инцентрах*.¹⁾ Сформулируем её.

Пусть ABC — произвольный треугольник, AA_1 , BB_1 , CC_1 — его биссектрисы, I — инцентр треугольника ABC , $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ — инцентры треугольников AB_1I , A_1BI , BC_1I , B_1CI , CA_1I , C_1AI соответственно. Гипотеза утверждает, что шесть инцентров P_j лежат на одном эллипсе.

Эта гипотеза верна. Точнее, справедлива следующая

Теорема об инцентрах. Шесть инцентров P_j лежат на одной кривой второго порядка.

Интуитивно очевидно, да и рисунки в *GeoGebra* показывают, что этой кривой будет именно эллипс. Мы не будем строго доказывать этот факт, а вместо этого дадим некоторое естественное обобщение теоремы об инцентрах.

Наш способ доказательства теоремы об инцентрах будет опираться на *алгебру комплексных чисел* и *символьные вычисления*. О применении комплексных чисел в планиметрии хорошо известно (см., например, книги [3], [4]). Поскольку придётся иметь дело с громоздкими буквенными выражениями, нам понадобится какая-нибудь *система компьютерной алгебры*, например *Maple* [5]. Как всё это работает, мы предварительно поясним на более простых примерах. Читатель должен уметь выполнять стандартные алгебраические операции над комплексными числами и понимать геометрический смысл этих операций.

Подчеркнём принципиальное отличие технических инструментов, которые можно применять для проверки геометрических гипотез. С помощью системы динамической геометрии мы можем доказательно опровергнуть гипотезу, выполнив все необходимые построения с достаточной точностью. Так, можно показать, что первые две гипотезы из [1] ошибочны: при варьировании соответствующих рисунков нетрудно обнаружить явные контрпримеры. Однако для

¹⁾Инцентром треугольника называется центр его вписанной окружности.

строгого обоснования правдоподобной гипотезы приближённых построений, даже очень точных, недостаточно. Система компьютерной алгебры позволяет в определённом смысле осуществлять абсолютно точные геометрические построения, и у нас появляется шанс доказать гипотезу.

Разумеется, *механический метод* доказательства с его символьными вычислениями — не самый лучший способ обоснования геометрической гипотезы. Но что делать, когда по-другому не получается, а доказательно судить о гипотезе хочется. Гипотеза об инцентрах на данный момент имеет именно такой статус. Отметим, что некоторые гипотезы из [1] допускают чисто геометрическое обоснование (см., например, [6]).

В конце статьи мы кратко обсудим ещё две гипотезы из [1], связанные с конструкцией хорошо известной *теоремы Морлея*. Механический метод проверки показывает, что эти гипотезы также верны, причём даже в более общем виде.

Пара примеров, иллюстрирующих метод

Чтобы показать читателю, как работает механический метод, основанный на алгебре комплексных чисел, мы решим две относительно новых геометрических задачи.²⁾ Первая из них предлагалась на региональном этапе XXXIX Всероссийской олимпиады школьников (задача 11.4), а вторая — это задача 5296 («Математика в школе», № 2 за этот год).

Будем использовать следующее обозначение: $l(P, v)$ — прямая, проходящая через точку P в направлении вектора v . Основная процедура — это вычисление точки пересечения Z двух прямых $l(P, v)$ и $l(Q, w)$ по формуле, которую читателю предлагается вывести самостоятельно:

$$Z = \frac{v(Q\bar{w} - \bar{Q}w) - w(P\bar{v} - \bar{P}v)}{v\bar{w} - \bar{v}w}$$

(здесь и далее черта сверху означает *комплексное сопряжение*).

Задача 1. В окружность Ω вписан треугольник ABC . Пусть P и Q — середины двух дуг AC окружности Ω . Пусть M — основание перпендикуляра, опущенного из точки Q на отрезок AB . Докажите, что окружность, описанная около треугольника BMC , делит пополам отрезок BP .

Из формулировки задачи мы убрали несущественные для механического метода требования (типа остроугольности треугольника ABC), которые в определённом смысле необходимы при традиционном способе решения задачи.

РЕШЕНИЕ. Будем считать треугольник ABC расположенным на комплексной плоскости так, что Ω — это единичная окружность $|z| = 1$, причём $P = 1$. Положим

$$A = z_1, \quad B = z_2,$$

где z_1, z_2 — комплексные числа, для которых $|z_1| = |z_2| = 1$. Тогда

$$Q = -P = -1, \quad C = \bar{A} = \frac{1}{z_1},$$

²⁾На самом деле эти задачи просто первыми подвернулись под руку. Для иллюстрации метода вполне сгодилась бы и любая другая геометрическая задача *рационального типа*, причём то, насколько она геометрически трудна, здесь не имеет значения.

а точка M можно получить как точку пересечения прямых $l(Q, (B - A)i)$ и $l(A, B - A)$:

$$M = \frac{z_1 z_2 + z_1 + z_2 - 1}{2}.$$

Вычислим центр O окружности ω , описанной около треугольника BMC , и середину L отрезка BP :

$$O = -\frac{z_2 - 1}{2(z_1 - 1)}, \quad L = \frac{z_2 + 1}{2}.$$

Достаточно убедиться, что $L \in \omega$, т. е. что $|OL|$ равно, например, $|OB|$. Рассмотрим число

$$w = \frac{L - O}{B - O} = \frac{z_1 z_2 + z_1 - 2}{2z_1 z_2 - z_2 - 1}$$

и покажем, что $|w| = 1$. В самом деле, имеем

$$\bar{w} = \frac{z_1^{-1} z_2^{-1} + z_1^{-1} - 2}{2z_1^{-1} z_2^{-1} - z_2^{-1} - 1} = \frac{1 + z_2 - 2z_1 z_2}{2 - z_1 - z_1 z_2} = \frac{1}{w},$$

что и требовалось. □

В этом примере все выкладки легко проделать вручную, но так бывает крайне редко: при механическом подходе обычно приходится иметь дело с громоздкими выражениями.

Задача 2. В треугольнике ABC провели биссектрису CL , а в треугольники CAL и CBL вписали окружности, которые касаются прямой AB в точках M и N соответственно. Докажите равенство

$$\frac{2}{|CL|} = \frac{1}{|LN|} - \frac{1}{|AM|}.$$

РЕШЕНИЕ. Примем окружность, вписанную в треугольник CAL , за единичную; в частности, её центр $I = 0$. Пусть она касается сторон CA и CL в точках L_1 и A_1 соответственно. Положим

$$A_1 = z_1, \quad L_1 = z_2, \quad M = z_3,$$

где $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Тогда

$$A = \frac{2z_2 z_3}{z_2 + z_3}, \quad L = \frac{2z_1 z_3}{z_1 + z_3}, \quad C = \frac{2z_1 z_2}{z_1 + z_2}.$$

Для вычисления точки N сначала найдём центр J окружности, вписанной в треугольник CBL . Он может быть найден как точка пересечения прямых $l(L, (L - I)i)$ и $l(C, I' - C)$, где I' — точка, симметричная точке I относительно прямой CL . Получим

$$J = \frac{2z_1 z_3 (z_1^2 + z_1 z_2 - z_1 z_3 + z_2 z_3)}{(z_1 + z_3)(z_1^2 + z_2 z_3)}.$$

Теперь точку N можно найти как проекцию точки J на прямую AL :

$$N = \frac{z_1 z_3 (2z_1^2 + z_1 z_2 - z_1 z_3 + 3z_2 z_3 - z_3^2)}{(z_1 + z_3)(z_1^2 + z_2 z_3)}.$$

Из геометрических соображений треугольник A_1L_1M всегда будет остроугольным. Если его считать *положительно ориентированным*, то будут справедливы равенства

$$|AM| = \frac{i(z_2 - z_3)}{z_2 + z_3}, \quad |CL| = -\frac{2iz_1(z_2 - z_3)}{(z_1 + z_2)(z_1 + z_3)}$$

(доказательство оставляем читателю в качестве упражнения). Очевидно, равенство, которое требуется доказать в задаче, равносильно равенству

$$\left(\frac{1}{|AM|} + \frac{2}{|CL|} \right)^2 = \frac{1}{|LN|^2}. \quad (1)$$

Поскольку $|LN|^2 = (L - N)(\bar{L} - \bar{N})$, нам достаточно загрузить в (1) найденные выше выражения для $|AM|$, $|CL|$, L , N и затем убедиться, что получится тождество относительно z_1 , z_2 , z_3 . Эту рутину, конечно, следует предоставить компьютеру. \square

Другие примеры решения геометрических задач при помощи комплексных чисел читатель в большом количестве сможет найти в книге [4].

Доказательство теоремы об инцентрах

Сначала поясним, зачем нужны комплексные числа, т. е. почему стандартный метод координат не приводит к успеху. Ведь первое, что приходит на ум — это воспользоваться известными формулами для координат инцентра треугольника. Для инцентра I треугольника ABC они таковы:

$$I_x = \frac{|AB|C_x + |BC|A_x + |CA|B_x}{|AB| + |BC| + |CA|}, \quad I_y = \frac{|AB|C_y + |BC|A_y + |CA|B_y}{|AB| + |BC| + |CA|}$$

(A_x и A_y обозначают координаты точки A и т. д.). На первый взгляд применение этих формул кажется безобидным, но оптимизм поубавится, как только мы получим итоговые выражения для координат шести инцентров P_j — это довольно громоздкие *квадратные радикалы* (из-за расстояний $|AB|$ и т. п.), причём *вложенные* (потому что формулами нужно пользоваться дважды). Они останутся громоздкими даже тогда, когда мы будем экономить на буквенных переменных и, например, введём систему координат так, чтобы

$$A = (0, 0), \quad B = (1, 0).$$

Впрочем, надежда на успех ещё будет, поскольку возможности современных систем компьютерной алгебры действительно велики. Но не в нашей ситуации, когда нужен некий определитель (зависящий от координат точек P_j и составленный по аналогии с определителем (4), см. ниже) проверить на тождественное равенство нулю. Этот определитель оказывается «несъедобным» для **Maple** — при попытке его вычислить программа довольно быстро исчерпывает всю доступную память и зависает, не выдав никакого результата.³⁾

³⁾Так было у автора. Это, конечно, не означает, что у более искушённого в компьютерной алгебре читателя случится то же самое, если он захочет повторить подобный эксперимент. Возможно, при более грамотной эксплуатации **Maple** всё-таки справится с тем громоздким определителем, либо это сделает какая-нибудь другая система компьютерной алгебры. Но в любом случае придётся что-то придумывать — простой метод грубой силы не работает.

Таким образом, задача состоит в том, чтобы предварительно представить координаты инцентров P_j в «удобоваримом» виде. Как кажется, комплексные числа — адекватный и, главное, общедоступный инструмент для решения этой задачи.⁴⁾

Обозначим углы треугольника ABC через α, β, γ . Будем считать, что наш треугольник расположен на комплексной плоскости так, что

$$A = 0, \quad B = 1$$

(вещественную ось представим себе горизонтальной и идущей слева направо, мнимую ось — направленной вертикально вверх, точку C — лежащей в верхней полуплоскости).

Положим

$$a = \cos \frac{\alpha}{4} + i \sin \frac{\alpha}{4}, \quad b = \cos \frac{\beta}{4} + i \sin \frac{\beta}{4}, \quad c = \cos \frac{\gamma}{4} + i \sin \frac{\gamma}{4}.$$

Пусть также $\zeta = \cos 45^\circ + i \sin 45^\circ$ — число, для которого выполнено равенство

$$\zeta^4 + 1 = 0. \quad (2)$$

Числа a, b, c имеют простой геометрический смысл: они отвечают за повороты на четверть углов α, β, γ . Поскольку $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, справедливо тождество $abc = \zeta$. Используя наши стандартные обозначения для переменных, положим $a = z_1, b = z_2$. Тогда

$$c = \frac{\zeta}{z_1 z_2}.$$

Перейдём непосредственно к вычислениям. Точку C можно получить как точку пересечения прямых $l(A, a^4)$ и $l(B, b^{-4})$, а точку I — как точку пересечения прямых $l(A, a^2)$ и $l(B, b^{-2})$. Вычисления дают:

$$C = \frac{z_1^8(z_2^8 - 1)}{z_1^8 z_2^8 - 1}, \quad I = \frac{z_1^4(z_2^4 - 1)}{z_1^4 z_2^4 - 1}.$$

Далее рассмотрим, например, треугольник AB_1I . Как нетрудно увидеть,

$$\angle IAB_1 = \frac{\alpha}{2}, \quad \angle AIB_1 = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Следовательно, инцентр P_1 треугольника AB_1I можно вычислить как точку пересечения прямых $l(A, (I - A)a)$ и $l(I, (A - I)a^{-1}b^{-1})$:

$$P_1 = \frac{z_1^6(z_2^4 - 1)}{(z_1^4 z_2^2 - 1)(z_1^2 z_2^2 + 1)}.$$

Аналогично, инцентр P_2 треугольника A_1BI — это точка пересечения прямых $l(B, (I - B)b^{-1})$ и $l(I, (B - I)ab)$:

$$P_2 = \frac{z_1^2(z_2^2 - 1)(z_1^2 z_2^4 + z_1^2 z_2^2 + z_1^2 + z_2^2)}{(z_1^2 z_2^4 - 1)(z_1^2 z_2^2 + 1)}.$$

⁴⁾В общем случае для механического доказательства геометрических теорем можно привлечь «тяжёлую артиллерию коммутативной алгебры» (В. И. Арнольд), что обычно подразумевает применение различных алгоритмов для работы с *системами полиномиальных уравнений* (см., например, книгу [7]).

Далее находим

$$P_3 = l(B, (I - B)b) \cap l(I, (B - I)b^{-1}c^{-1}) = \frac{z_1^2(z_2^2 - 1)(z_1^4 z_2^2 - \zeta^2 z_1^2 z_2^4 - \zeta^2 z_1^2 z_2^2 + 1)}{(z_1^4 z_2^4 - 1)(z_1^2 - \zeta^2 z_2^2)}.$$

Здесь в итоговом выражении впервые появляется число ζ . В выражениях для инцентров

$$\begin{aligned} P_4 &= l(C, (I - C)c^{-1}) \cap l(I, (C - I)bc), \\ P_5 &= l(C, (I - C)c) \cap l(I, (C - I)a^{-1}c^{-1}), \\ P_6 &= l(A, (I - A)a^{-1}) \cap l(I, (A - I)ac), \end{aligned}$$

которые мы не приводим, оно также будет.

Как известно, на декартовой плоскости с координатами (x, y) произвольную кривую второго порядка можно задать уравнением

$$kx^2 + lxy + my^2 + ux + vy + w = 0.$$

На комплексной плоскости можно использовать *комплексные координаты*

$$(z, \bar{z}) = (x + iy, x - iy),$$

в которых кривая второго порядка описывается уравнением

$$Kz^2 + Lz\bar{z} + M\bar{z}^2 + Uz + V\bar{z} + W = 0.$$

Таким образом, мы должны доказать существование *нетривиального* набора коэффициентов K, L, \dots, W , для которых будут выполнены равенства

$$KP_j^2 + LP_j\bar{P}_j + M\bar{P}_j^2 + UP_j + V\bar{P}_j + W = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 6. \quad (3)$$

Как известно (см., например, учебник [8]), это равносильно тому, что *определитель*

$$\Delta(P_1, \dots, P_6) = \det([P_j^2, P_j\bar{P}_j, \bar{P}_j^2, P_j, \bar{P}_j, 1]_{j=1}^6) \quad (4)$$

системы линейных уравнений (3) с неизвестными K, L, \dots, W равен нулю.

Выражение для каждого из инцентров P_j имеет простую структуру — это рациональная дробь от z_1, z_2 и ζ . Выражение для \bar{P}_j можно получить, если в выражении для P_j всюду заменить z_1 на z_1^{-1} , z_2 на z_2^{-1} и ζ на ζ^{-1} . Ясно, что при этом получится рациональная дробь такого же вида. Поэтому вычисление в **Maple** определителя (4) не может быть проблемой.

Действительно, **Maple** за несколько секунд раскрывает этот определитель, но вместо ожидаемого нуля мы видим весьма громоздкую рациональную дробь:

$$\Delta(P_1, \dots, P_6) = \frac{f(z_1, z_2, \zeta)}{g(z_1, z_2, \zeta)}.$$

Однако ζ — не переменная, а фиксированное число, для которого имеет место равенство (2). И вот по модулю этого равенства вся дробь чудесным образом превращается в нуль:

$$\Delta(P_1, \dots, P_6) = 0.$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно $f(z_1, z_2, \zeta)$ поделить на $\zeta^4 + 1$ с остатком (как один многочлен делит с остатком на другой) и увидеть, что остаток нулевой.

Итак, доказано, что все шесть инцентров P_j лежат на одной кривой второго порядка. Как уже отмечалось, этой кривой будет эллипс. Для доказательства достаточно положить $W = 1$ и, вычислив коэффициенты K, L, M , убедиться в справедливости неравенства

$$L^2 - 4KM > 0.$$

Однако выражения для K, L, M оказываются слишком громоздкими, и на этом пути получить строгое доказательство было бы затруднительно.

Полная теорема об инцентрах

В качестве своеобразной компенсации мы сформулируем более общий результат, включающий в себя теорему об инцентрах. Вместе с инцентрами P_j треугольников $AB_1I, A_1BI, BC_1I, B_1CI, CA_1I, C_1AI$ будем рассматривать и центры окружностей, *вневписанных* в эти треугольники. Обозначим через P_j^X центр вневписанной в j -й треугольник окружности, лежащий против вершины X (например, $P_4^{B_1}$ — это центр вневписанной в треугольник B_1CI окружности, который расположен против вершины B_1). Точнее, нас будут интересовать шестёрки точек (Q_1, \dots, Q_6) , где Q_j — это либо инцентр P_j , либо один из центров P_j^X . Одна из них, а именно, (P_1, \dots, P_6) , обладает тем свойством, что её точки принадлежат одной кривой второго порядка. Интересная особенность нашего доказательства этого факта состоит в том, что можно сразу предъявить ещё одну шестёрку точек с таким же свойством.

Действительно, во всех вычислениях с участием ζ важно было только то, что это число удовлетворяет равенству (2). Возьмём теперь $\zeta = \cos(-45^\circ) + i \sin(-45^\circ)$. Так как равенство (2) по-прежнему будет верным, то, например, выражение для точки пересечения

$$l(B, (I - B)b) \cap l(I, (B - I)b^{-1}c^{-1})$$

не изменится, но его *геометрический* смысл станет другим — вместо инцентра P_3 мы получим, как нетрудно видеть, центр P_3^B . Аналогично, выражения, полученные ранее для инцентров P_4, P_5, P_6 , теперь будут представлять центры $P_4^{B_1}, P_5^{A_1}, P_6^A$ соответственно. Ясно, что буквенные выражения для определителей $\Delta(P_1, \dots, P_6)$ и $\Delta(P_1, P_2, P_3^B, P_4^{B_1}, P_5^{A_1}, P_6^A)$ будут тождественно совпадать. Значит, если упрощение первого из них по модулю равенства (2) привело к нулю, то ровно то же случится и со вторым.⁵⁾ Итак, мы «бесплатно» получили, что все точки шестёрки

$$(P_1, P_2, P_3^B, P_4^{B_1}, P_5^{A_1}, P_6^A)$$

также лежат на одной кривой второго порядка. Но теперь, как видно из рисунков в GeoGebra, этой кривой может быть не только эллипс, но и гипербола.

Далее, хотя бы из спортивного интереса, можно отыскать все шестёрки (Q_1, \dots, Q_6) с этим свойством. Поскольку выражения для центров P_j^X ничем принципиально не отличаются от выражений для инцентров P_j (проверить это — очередное упражнение для читателя), вычисление любого из определителей $\Delta(Q_1, \dots, Q_6)$ будет не сложнее, чем вычисление определителя (4). Почему бы не применить полный компьютерный перебор?

⁵⁾Эту важную идею *алгебраического сопряжения* лучше сначала продумать на следующем более простом примере: если выполняется равенство вида $(1 + \sqrt{2})^{2013} = r + s\sqrt{2}$, где r, s — рациональные числа, то справедливо и равенство $(1 - \sqrt{2})^{2013} = r - s\sqrt{2}$.

Включаем компьютер, и через некоторое время обнаруживаем в точности 32 шестёрки, для которых $\Delta(Q_1, \dots, Q_6) = 0$. Вот их список:

$$\begin{aligned} & (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6), \quad (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5^I, P_6^I), \quad (P_1, P_2, P_3^I, P_4^I, P_5^I, P_6^I), \\ & (P_1, P_2, P_3^B, P_4^{B_1}, P_5^C, P_6^{C_1}), \quad (P_1, P_2, P_3^{C_1}, P_4^C, P_5^C, P_6^{C_1}), \quad (P_1, P_2, P_3^B, P_4^{B_1}, P_5^{A_1}, P_6^A), \\ & (P_1, P_2, P_3^{C_1}, P_4^C, P_5^{A_1}, P_6^A), \quad (P_1^I, P_2^I, P_3^B, P_4^{B_1}, P_5^C, P_6^{C_1}), \quad (P_1^I, P_2^I, P_3^B, P_4^{B_1}, P_5^{A_1}, P_6^A), \\ & (P_1^I, P_2^I, P_3^{C_1}, P_4^C, P_5^{A_1}, P_6^A), \quad (P_1^I, P_2^I, P_3^{C_1}, P_4^C, P_5^C, P_6^{C_1}), \quad (P_1^I, P_2^I, P_3^I, P_4^I, P_5^I, P_6^I) \end{aligned}$$

(здесь каждая шестёрка, за исключением первой и последней, имеет ещё по две аналогичных). Читатель в качестве развлечения может порисовать картинки в GeoGebra и поэкспериментировать с ними.⁶⁾

Две гипотезы о конструкции теоремы Морлея

Читателю, безусловно, хорошо знакома теорема Морлея: если в произвольном треугольнике ABC провести трисектрисы $AA_1, AA_2, BB_1, BB_2, CC_1, CC_2$, то точки пересечения пар трисектрис BB_1 и CC_2, CC_1 и AA_2, AA_1 и BB_2 образуют правильный треугольник.

Доказать эту теорему механическим методом не представляет никакого труда. Пусть, как и выше, α, β, γ — углы треугольника ABC . Положим

$$a = \cos \frac{\alpha}{3} + i \sin \frac{\alpha}{3} = z_1, \quad b = \cos \frac{\beta}{3} + i \sin \frac{\beta}{3} = z_2, \quad c = \cos \frac{\gamma}{3} + i \sin \frac{\gamma}{3} = \frac{\zeta}{z_1 z_2},$$

где $\zeta = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$ — число, удовлетворяющее равенству

$$\zeta^2 - \zeta + 1 = 0. \quad (5)$$

Обозначим точки пересечения указанных пар трисектрис через X, Y, Z соответственно. Снова приняв $A = 0, B = 1$, мы вычислим точку C , а затем точки Z, X, Y :

$$\begin{aligned} C &= l(A, a^3) \cap l(B, b^{-3}) = \frac{z_1^6(z_2^6 - 1)}{z_1^6 z_2^6 - 1}, \quad Z = l(A, a) \cap l(B, b^{-1}) = \frac{z_1^2(z_2^2 - 1)}{z_1^2 z_2^2 - 1}, \\ X &= l(B, b^{-2}) \cap l(C, (B - C)c^{-1}) = \frac{z_1^2(z_2^2 - 1)(z_1^2 z_2^2 + z_1^2 + \zeta - 1)}{(z_1^2 z_2^2 - 1)(z_1^2 z_2^2 + \zeta)}, \\ Y &= l(A, a^2) \cap l(C, (A - C)c) = \frac{z_1^4(z_2^2 - 1)(z_2^2 + \zeta)}{(z_1^2 z_2^2 - 1)(z_1^2 z_2^2 + \zeta)}. \end{aligned}$$

Теперь достаточно убедиться в верности равенства

$$Y - Z = \zeta(X - Z)$$

в предположении, что имеет место равенство (5).

Ничуть не сложнее доказать и следующие две гипотезы из [1]. Первая из них утверждает, что основания трисектрис $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ лежат на одном эллипсе. Во второй гипотезе это же утверждается относительно точек пересечения пар трисектрис AA_1 и BB_1, CC_2 и AA_2 ,

⁶⁾Автор должен честно признаться, что не справился с таким количеством внезапно свалившихся на голову эллипсов и гипербол и пока не может предложить сколь-нибудь внятной их классификации.

BB_1 и CC_1 , AA_2 и BB_2 , CC_1 и AA_1 , BB_2 и CC_2 (обозначим эти точки $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$ соответственно). Представив каждую из точек A_1, \dots, Z_2 рациональной дробью от z_1, z_2 и ζ , мы затем механически обнаружим, что

$$\Delta(A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2) = \Delta(X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2) = 0.$$

На самом деле утверждения этих гипотез справедливы для произвольных чевиан $AA_1, AA_2, BB_1, BB_2, CC_1, CC_2$, удовлетворяющих условиям

$$\angle CAA_2 = \angle BAA_1, \quad \angle ABB_2 = \angle CBB_1, \quad \angle BCC_2 = \angle ACC_1.$$

Как ни странно, механическая проверка (она предоставляется читателю в качестве заключительного упражнения) здесь даже логически проще, чем в частном случае трисектрис.

Список литературы

- [1] Штейнгарц Л.А. Орбиты Жукова и теорема Морлея // Математика в школе. 2012. № 6. С. 53 — 61.
- [2] <http://www.geogebra.org>
- [3] Моденов П.С. Задачи по геометрии. М.: Наука, 1979.
- [4] Понарин Я.П. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах. М.: МЦНМО, 2004.
- [5] <http://www.maplesoft.com>
- [6] Мякишев А. О некоторых окружностях, связанных с треугольником. Часть 1 // Математическое образование. 2012. № 2. С. 49 — 65.
- [7] Chou S.-C. Mechanical Geometry Theorem Proving. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1988.
- [8] Винберг Э.Б. Курс алгебры. М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2001.

Title

The mechanical proof of the theorem about incenters

Abstract

In arbitrary triangle carried out the bisectors and into each of six formed triangles entered the incircle. The theorem about incenters claims that the centers of these six incircles lie on one conic. The mechanical proof with computer algebra system **Maple** of this theorem and its generalization is presented. For effective calculations the algebra of complex numbers is applied.

Keywords

Complex numbers, computer algebra systems, mechanical geometry theorem proving