ММ226 (5 баллов)

Ответ: Да, такие числа существуют.

Решение: Будем искать счастливые числа среди чисел вида $n = p^{\alpha}$, где p - простое число. Всего у числа n $(\alpha + 1)$ делителей. При $\alpha \geq 6$ делителей не меньше семи, и его седьмой делитель равен: $d_7 = p^6$. По условию $p^6 = \alpha + 1$. Значит, $\alpha = p^6 - 1$, и счастливое число имеет вид $n = p^{p^6-1}$.

Если $p = 7$, то $7^6 - 1$ не кратно семи, и потому число $n = 7^{7^6-1}$ не является точной седьмой степенью натурального числа.

А если $p \neq 7$, то поскольку p простое, и потому не кратно 7. А, значит, по малой теореме Ферма $p^6 \equiv 1\ mod\ 7$, и потому $(p^6 - 1) \equiv 0\ mod\ 7$ – показатель числа n кратен 7. Следовательно, $n = p^{p^6-1}$ является точной седьмой степенью натурального числа. Мы нашли все счастливые числа вида $n = p^{\alpha}$, а, именно, это числа $n = p^{p^6-1}$, где p - простое число, отличное от семи. Наименьшее число такого вида: $2^{63} = 9223372036854775808$. Ответ на вопрос задачи получен.

Рассмотрим некоторые смежные вопросы.

Пусть седьмой делитель d_7 числа n имеет вид $p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$. Поскольку все его делители вида $p_i^{\beta}, \beta = 1, \dots, \alpha_i$ не больше d_7, то $\alpha_1 + \dots + \alpha_s \leq 6$. Следовательно, количество r простых делителей в каноническом разложении счастливого числа не больше 6-ти.

Для примера возьмём счастливые числа вида

$$n = p_1^{p_1-1} p_2^{p_1-1} p_3^{p_1-1} p_4^{p_1-1} p_5^{p_1-1} p_6^{p_1-1},$$

где простые делители удовлетворяют соотношениям $p_1^6 < p_2 < \dots < p_6$, и при этом $p_1 \equiv 1\ mod\ 7$. Здесь $d_7 = \tau(n) = p_1^6$. В этом случае $r = 6$.
По аналогии укажем некоторые форматы счастливых чисел и для всех $r < 6$:

$$r = 5: n = p_1^{p_1^2-1} p_2^{p_1-1} p_3^{p_1-1} p_4^{p_1-1} p_5^{p_1-1},$$

$$r = 4: n = p_1^{p_1^3-1} p_2^{p_1-1} p_3^{p_1-1} p_4^{p_1-1},$$

$$r = 3: n = p_1^{p_1^4-1} p_2^{p_1-1} p_3^{p_1-1},$$

$$r = 2: n = p_1^{p_1^5-1} p_2^{p_1-1}.$$

Таким образом, с учётом предыдущего можем сделать вывод, что количество r простых делителей в каноническом разложении счастливого числа может принимать любое значение от 1 до 6-ти.

Для примера укажем все форматы счастливых чисел в случае $r = 2$:

1). $p_1^6 < p_2$: $\tau(n) = p_1^6$,

$n = p_1^{p_1^5-1} p_2^{p_1-1}, n = p_1^{p_1-1} p_2^{p_1^5-1}$ при $p_1 \equiv 1\ mod\ 7$,

$n = p_1^{p_1^4-1} p_2^{p_1^2-1}, n = p_1^{p_1^2-1} p_2^{p_1^4-1}$ при $p_1 \equiv 1{,}6\ mod\ 7$,

$n = p_1^{p_1^3-1} p_2^{p_1^3-1}$ при $p_1 \equiv 1{,}2{,}4\ mod\ 7$.

2). $p_1^4 < p_2 < p_1^5$: $\tau(n) = p_1^5$,

$n = p_1^{p_1^4-1} p_2^{p_1-1}, n = p_1^{p_1^3-1} p_2^{p_1^2-1}, n = p_1^{p_1^2-1} p_2^{p_1^3-1}, n = p_1^{p_1-1} p_2^{p_1^4-1}$ при $p_1 \equiv 1\ mod\ 7$

3). $p_1^3 < p_2 < p_1^4$: $\tau(n) = p_1 p_2$.

$n = p_1^{p_1-1} p_2^{p_2-1}, n = p_1^{p_2-1} p_2^{p_1-1}$ при $p_1, p_2 \equiv 1\ mod\ 7$

4). $p_1^2 < p_2 < p_1^3$: $\tau(n) = p_1^4$.

$n = p_1^{p_1^3-1} p_2^{p_1-1}, n = p_1^{p_1-1} p_2^{p_1^3-1}$ при $p_1 \equiv 1\ mod\ 7$

$n = p_1^{p_1^2-1} p_2^{p_1^2-1}$ при $p_1 \equiv 1{,}6\ mod\ 7$

5). $p_1^{\frac{3}{2}} < p_2 < p_1^2$: $\tau(n) = p_2^2$.

$n = p_1^{p_2-1} p_2^{p_2-1}$ при $p_2 \equiv 1\ mod\ 7$

6). $p_1 < p_2 < p_1^{\frac{3}{2}}$: $\tau(n) = p_1^3$.

$n = p_1^{p_1^2-1} p_2^{p_1-1}, n = p_1^{p_1-1} p_2^{p_1^2-1}$ при $p_1 \equiv 1\ mod\ 7$

Обобщение

Пусть задано натуральное число $m \geq 2$. Существует ли число n, являющееся точной m – ой степенью натурального числа, и для которого m – ый делитель равен количеству делителей числа n?

Следуя предложенной схеме находим, что если m простое число, то число n можно взять в виде $n = p^{p^{m-1}-1}$, где p - простое число, отличное от m. Здесь $d_m = \tau(n) = p^{m-1}$.

А если m составное число, то число n можно взять в виде $n = p^{p^{m-1}-1}$, где p - простое число такое, что $p \equiv 1\ mod\ m$.
Здесь также $d_m = \tau(n) = p^{m-1}$.

Так что ответ на поставленный вопрос положительный и в общем случае.